СТАНИСЛАВ ПЕЈОВИЋ
ВЕЛИМИР СИМОНОВИЋ

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ ОСНОСИМЕТРИЧНОГ СТРУЈАЊА У ТУРБОМАШИНАМА

Математички весник
6 (21) Св. 3, 1969.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
6 (21), 1069, стр. 323—330

Станислав Пејовић
Велимир Симоновић

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ ОСНОСИМЕТРИЧНОГ СТРУЈАЊА У ТУРБОМАШИНАМА

(Саопштено, 26. фебруара 1969.)

У овом раду је дат поступак за прорачун осносиметричног струјања нестишљивог, невискозног флуида када је унапред прописана промена брзине дуж неке, произвољне струјнице. Систем парцијалних једначина које описују кретање флуида решаван је помоћу редова. Свака променљива је развијена у ред по струјној функцији и предпостављено је да се чланови петог и вишег степена смеју занемарити.

Изведене су једначине лопатица које се, за случај константне енергије на уласку у посматрани део струјног простора, своде на једну парцијалну диференцијалну једначину која се решава као обична диференцијална једначина.

На основу изложене методе разрађен је поступак и урађен програм са електронску дигиталну рачунску машину. На једном примеру је илустрован поступак срачунавања.

1. Трансформација једначине струјања — При стационарном, осносиметричном струјању невискозног флуида једначина континуитета представља потребни услов постојања струјне функције ψ, а предпоставка да је струјање потенцијално у меридијанским равнима је услов егзистенције потенцијала брзине φ. У поларно цилиндричном координатном систему једначина континуитета и услов потенцијалног струјања у меридијанским равнима су [1, 8][1])

$$\frac{\partial c_r}{\partial r}+\frac{c_r}{r}+\frac{\partial c_z}{\partial z}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial z}-\frac{\partial c_z}{\partial r}=0, \tag{2}$$

где су r и z радијална и аксијална координата, c_r и c_z пројекције брзине на радијални и аксијални правац.

Ојлерове једначине кретања флуида у Ламбовом облику за стационарно, осносиметрично струјање гласе [8]

$$F_r=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{2}\right)-\frac{c_u}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rc_u), \tag{3}$$

---

[1]) Бројеви у загради се односе на литературу.

$$F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right) - \frac{c_u}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rc_u), \tag{4}$$

$$F_u = \frac{c_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rc_u) + \frac{c_z}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rc_u). \tag{5}$$

У овим једначинама је c_u обимна пројекција брзине, p притисак, ρ густина флуида; F_r, F_u и F_z су пројекције запреминских сила по јединици масе у радијалном, обимном и аксијалном правцу.

Потенцијал брзине φ и струјну функцију ψ дефинишу изрази [1]

$$c_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\psi}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{6}$$

$$c_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\psi}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{7}$$

Нека струјна функција φ и потенцијал брзине ψ буду независно промен-љиве и нека је Јакобијан трансформације координата различит од нуле у простору где се посматра струјање. Тада једначине (1), (2), (3), (4), и (5) могу да се напишу у облику

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\cos\delta}{c_m}, \tag{8}$$

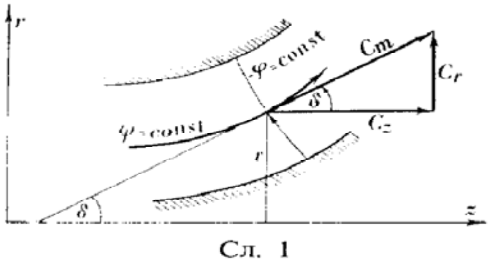
$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{\psi \sin\delta}{rc_m}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\sin\delta}{c_m}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \psi} = \frac{\psi \cos\delta}{rc_m}, \tag{11}$$

$$F_\varphi = \frac{c_m}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + c_m\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{c^2}{2}\right) - \frac{c_m c_u}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(rc_u), \tag{12}$$

$$F_\psi = \frac{rc_m}{\rho\psi}\frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{rc_m}{\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{c^2}{2}\right) - \frac{c_m c_u}{\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}(rc_u), \tag{13}$$



Сл. 1

$$F_u = \frac{c_m^2}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(rc_u), \tag{14}$$

где је $c_m = (c_r^2 + c_z^2)^{1/2}$ меридијанска пројекција брзине, δ угао између меридијанске и аксијалне пројекције брзине (сл. 1) а φ и ψ су координате. С циљем да се добију координате које ће имати дужинске јединице, уводе се нове координате ξ и η дефинисане изразима

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = c_{mR}(\xi), \tag{15}$$

$$\psi = c_{mm}^{1/2}\,\eta. \tag{16}$$

У овим једначинама је c_{mR} промена меридијанске пројекције брзине дуж произвољне меридијанске пројекције струјнице $r=F(z)$ и c_{mm} је нека произвољна константа која има јединицу брзине (дужина/време).

Трансформацијом једначина (8) до (14) добија се

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=-\frac{c_{mm}}{c_m}\frac{\eta}{r}\sin\delta, \tag{17}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta}=\frac{c_{mm}}{c_m}\frac{\eta}{r}\cos\delta, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{c_{mR}}{c_m}\right)=-\frac{c_{mm}}{c_m}\frac{\eta}{r}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}, \tag{19}$$

$$\frac{c_{mR}}{c_m}\frac{\partial\delta}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{c_{mm}}{c_m}\frac{\eta}{r}\right), \tag{20}$$

$$F_\xi=\frac{c_m}{c_{mR}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{c^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-\frac{c_m}{c_{mR}}\frac{c_u}{r}\frac{\partial}{\partial\xi}(rc_u), \tag{21}$$

$$F_\eta=\frac{rc_m}{\eta\, c_{mm}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{c^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-\frac{c_m}{c_{mm}}\frac{c_u}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(rc_u), \tag{22}$$

$$F_u=\frac{c_m^2}{rc_{mR}}\frac{\partial}{\partial\xi}(rc_u), \tag{23}$$

у којима је $c=(c_m^2+c_u^2)^{1/2}$ интензитет апсолутне брзине.

Ако се са $\omega=\text{const.}$ обележи угаона брзина кола турбомашине и са $\Phi(\eta)$ функција која зависи само од η једначине енергије добија вид

$$\frac{c^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\omega rc_u=\Phi(\eta). \tag{24}$$

Једначина површина лопатица осносиметричног струјања може се написати у виду [13]

$$\mu(\xi,\eta)-K\theta=C_1=\text{const.}, \tag{25}$$

где је $\mu(\xi,\eta)$ нека функција од ξ и η, а K, је нека константа. Пројекције у координатним правцима силе лопатица су [3, 13]

$$F_\xi=\lambda(\xi,\eta)\frac{c_m}{c_{mR}}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}, \tag{26}$$

$$F_\eta=\lambda(\xi,\eta)\frac{c_m}{c_{mm}}\frac{r}{\eta}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}, \tag{27}$$

$$F_u=-\lambda(\xi,\eta)\frac{K}{r}, \tag{28}$$

где је $\lambda(\xi,\eta)$ нека функција од ξ и η.

Из једначина (21), (22), (23), и (24), (26), (27) и (28) следује

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial \xi} = \left(\omega - \frac{c_u}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \xi}(r c_u), \tag{29}$$

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \left(\omega - \frac{c_u}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \eta}(r c_u) + \Phi'(\eta), \tag{30}$$

$$-\lambda K = \frac{c_m^2}{c_{mR}} \frac{\partial}{\partial \xi}(r c_u). \tag{31}$$

Диференцијалне једначине се лако могу свести на бездимензијски облик. Промењљиве које имају димензије дужине сводиће се на бездимензијски облик дељењем са полупречником радног кола турбомашине R, а промењљиве које имају димензије брзине замењују се количницима константе c_{mm} и тих величина. Тако ће се увођењем бездимензијских израза

$$H^2 = \frac{c_{mm}}{c_m}, \quad H_R^2 = \frac{c_{mm}}{c_{mR}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{R},$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{R}, \quad \bar{f} = \frac{r c_u}{R c_{mm}}, \quad \bar{\omega} = \frac{R\omega}{c_{mm}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{c_{mm}^2}, \quad \bar{\mu} = \mu,$$

$$\bar{\Phi}(\bar{\eta}) = \frac{R\Phi}{c_{mm}^2}.$$

у једначине (17), (18), (19), (20), (29), (30) и (31) добити бездимензијски облици

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\eta}} = -H^2 \frac{\bar{\eta}}{\bar{r}} \sin\delta, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\eta}} = H^2 \frac{\bar{\eta}}{\bar{r}} \cos\delta, \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\frac{H}{H_R}\right)^2 = -H^2 \frac{\bar{\eta}}{\bar{r}} \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\xi}}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \bar{\eta}} = \left(\frac{H_R}{H}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(H^2 \frac{\bar{\eta}}{\bar{r}}\right), \tag{35}$$

$$\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\xi}} = \left(\bar{\omega} - \frac{\bar{f}}{\bar{r}^2}\right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\xi}}, \tag{36}$$

$$\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\eta}} = \left(\bar{\omega} - \frac{\bar{f}}{\bar{r}^2}\right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\eta}} + \bar{\Phi}'(\bar{\eta}), \tag{37}$$

$$-\bar{\lambda} \bar{K} H_R^2 = \left(\frac{H_R}{H}\right)^4 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\xi}}. \tag{38}$$

2. Решавање једначина. — Решење диференцијалних једначина (32), (33), (34) и (35) тражиће се развијањем у ред непознатих величина $\overline{r}$, $\overline{z}$, δ и $(H_R/H)^2$

$$\overline{r} = F(\overline{\xi}) + r_1 \overline{\eta} + r_2 \overline{\eta}^2 + r_3 \overline{\eta}^3 + r_4 \overline{\eta}^4, \tag{39}$$

$$\overline{z} = \overline{\xi} + z_1 \overline{\eta} + z_2 \overline{\eta}^2 + z_3 \overline{\eta}^3 + z_4 \overline{\eta}^4, \tag{40}$$

$$\delta = F'(\overline{\xi}) + \delta_1 \overline{\eta} + \delta_2 \overline{\eta}^2 + \delta_3 \overline{\eta}^3 + \delta_4 \overline{\eta}^4. \tag{41}$$

$$\left(\frac{H_R}{H}\right)^2 = 1 + c_1 \overline{\eta} + c_2 \overline{\eta}^2 + c_3 \overline{\eta}^3 + c_4 \overline{\eta}^4. \tag{42}$$

Изостављањем чланова петог и вишег степена, предпоставља се да полиноми четвртог степена по $\overline{\eta}$ могу са довољном тачношћу да опишу тражене величине. Са коликом тачношћу првих пет чланова реда описују струјање може се добити, било упоређивањем срачунатих и експерименталних резултата, било изналажењем поступка за срачунавање грешки. Случај када је $\overline{r} = \overline{F}(\overline{z}) = 0$ разматрали су D. F. Hopkins и D. E. Hill [1] и упоређивањем са експерименталним релултатима показали да је слагање одлично (дводимензијско струјање кроз млазнике).

Уношењем израза за тражене функције према једначинама (39), (40), (41) и (42) у диференцијалне једначине (32), (33), (34) и (35) и срачунавањем коефицијената уз исте степене од $\overline{\eta}$, следује

$$r_1 - z_1 - \delta_1 = c_1 = 0, \tag{43}$$

$$r_3 = z_3 = \delta_3 = c_3 = 0, \tag{44}$$

$$r_2 = \frac{H_R^2}{2F}\left(1 - \frac{F'^2}{3} + \frac{F'^4}{3}\right), \tag{45}$$

$$z_2 = -\frac{H_R^2}{2F}\left(F' - \frac{F'^3}{6}\right), \tag{46}$$

$$\delta_2 = -\frac{H_R}{2F^2}(H_R F' - 2 H'_R F), \tag{47}$$

$$c_2 = \frac{H_R^2 F''}{2F}, \tag{48}$$

$$r_4 = \frac{1}{4F}\left[H_R^2\left(-\delta_2 F' + \frac{\delta_2 F'^3}{6}\right) - 2 r_2 (c_2 F + r_2)\right], \tag{49}$$

$$z_4 = \frac{1}{4F}\left[-H_R^2\left(\delta_2 - \frac{\delta_2 F'^2}{2}\right) - 2 z_2 (c_2 F + r_2)\right], \tag{50}$$

$$\delta_4 = \frac{1}{4F^2}[-H_R^2 (c_2 F + r_2)' + 2 H_R H'_R (c_2 F + r_2) - 2\delta_2 (c_2 F^2 + 2 r_2 F)], \tag{51}$$

$$c_4 = \frac{1}{4F}[H_R^2 (\delta'_2 + c_2 F'') - 2 c_2 r_2]. \tag{52}$$

Ови изрази одређују поједине коефицијенте у функцији од унапред прописане промене брзине H_R дуж унапред задане струјнице $\overline{r} = F(\overline{z})$ и извода ових двеју величина по променљивој $\overline{\xi}$. Ови гранични услови дефинисани су на струјници $\overline{\eta} = 0$ када је $\overline{z} = \overline{\xi}$, $\overline{r} = F(\overline{z})$, $H = H_R(\overline{z})$ и $\delta = F'(\overline{z})$.

На основу описаног поступка за решавање диференцијалних једначина (32), (33), (34) и (35), које одређују струјно поље у меридијанској равни — равни осне симетрије, развијен је алгоритам који омогућава практично прорачунавање на електронској дигиталној рачунској машини.

Референтна струјница $\bar{r}=F(\bar{z})$ задаје се низом тачака. У аналитичком облику се представља полиномом

$$\bar{r}=F(\bar{z})=F_0+F_1\bar{z}+F_2\bar{z}^2+\cdots+F_n\bar{z}^n, \tag{53}$$

чији се коефицијенти и степен одређују методом најмањих квадрата

На сличан начин се одређује и промена брзине

$$H_R=H_R(\bar{z})=H_0+H_1\bar{z}+H_2\bar{z}^2+\cdots+H_m\bar{z}^m \tag{54}$$

дуж референтне струјнице $\bar{r}=F(\bar{z})$.

Пошто је само дуж референтне струјнице $\bar{\eta}=0$, $\bar{z}=\bar{\xi}$, и за тај услов су одређени коефицијенти полинома (53) и (54), то се за даље срачунавање, у овим изразима уместо $\bar{z}$ ставља $\bar{\xi}$. Затим се налазе потребни изводи тих полинома по $\bar{\xi}$ а према једначинама (45) до (52) и коефицијенти редова (39) до (42) за разне вредности $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$. Струјне линије и еквипотенцијалне линије брзине добијају се као линије $\bar{\eta}=\text{const.}$ и $\bar{\xi}=\text{const.}$

Да би се одредио облик лопатица турбомашиве потребно је решити и једначине (36), (37) и (38) које одређују непознате функције $\bar{\lambda}(\bar{\xi},\bar{\eta})$, $\bar{\mu}(\bar{\xi},\bar{\eta})$ и $\bar{f}(\bar{\xi},\bar{\eta})$. У случају када је $\bar{\Phi}(\bar{\eta})=\text{const.}$ ове три једначине се своде на две диференцијалне једначине

$$\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\eta}}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\eta}}, \tag{55}$$

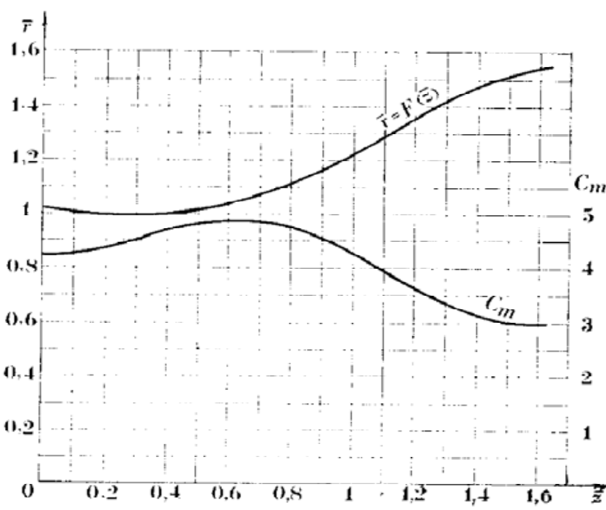
$$\frac{1}{\bar{K}H_R^2}\left(\frac{H_R}{H}\right)^4\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\xi}}+\bar{\omega}-\frac{\bar{f}}{\bar{r}^2}=0. \tag{56}$$

Једначина (55) је задовољена када је $\bar{f}$ било каква функција од $\bar{\mu}$

$$\bar{f}=\bar{f}(\bar{\mu}). \tag{57}$$

Тада се систем једначина своди само на једну једначину, (56), која се може решавати као обична диференцијална једначина.

Поступак решавања једначина лопатица (36), (37) и (38), или, једначина (55) и (56) биће предмет даљих истраживања.



Сл. 2

3. Пример. — Ради илустрације изложеног поступка решен је пример са граничним условима приказаним на слици 2. У бездимензијском координатном систему приказана је гранична струјница $\bar{r}=F(\bar{z})$ и промена брзине $c_m=c_m(\bar{z})$, која дефинише бездимензијску брзину дуж граничне струјнице

$$H_R=\frac{c_{mm}}{c_m}, \qquad (c_{mm}=\text{const.}=4{,}2\ \text{m/s}).$$

Коефицијенти полинома (53) и (54) су:

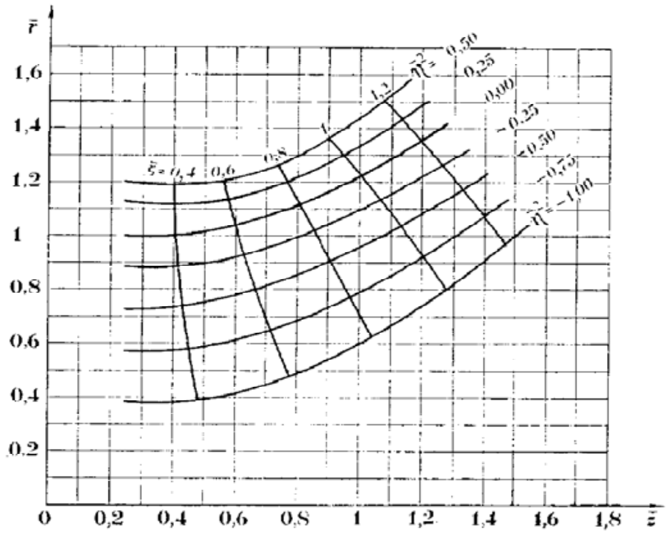
$F_0 = 1{,}02, \qquad H_0 = 0{,}999,$

$F_1 = -0{,}0225, \qquad H_1 = 0{,}0386,$

$F_2 = -0{,}296, \qquad H_2 = -0{,}821,$

$F_3 = 0{,}843, \qquad H_3 = 1{,}16,$

$F_4 = -0{,}325, \qquad H_4 = -0{,}387.$



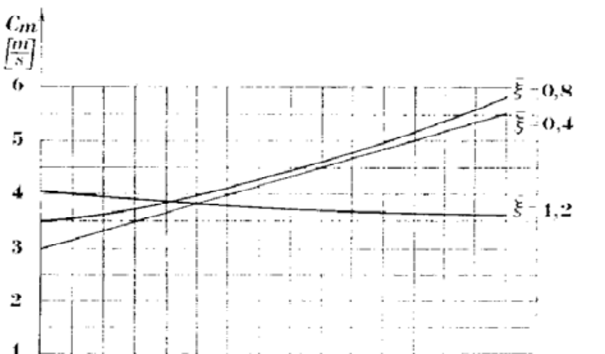
Сл. 3

Добијени резултати приказани су на слици 3 и 4. Слика 3 представља потенцијалну мрежу у меридијанској равни. Линије $\bar{\xi} = \text{const.}$ су еквипотенцијалне линије брзине а линије $\bar{\eta} = \text{const.}$ су струјнице (меридијанске пројекције). Било која линија $\bar{\eta} = \text{const.}$ може бити граница струјног простора.

На слици 4 приказане су промене брзина дуж линија $\bar{\xi} = 0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}2$, у зависности од координате $\bar{\eta}^2$. Брзина c_m срачунавана је према изразу

$$c_m = \frac{c_m}{H_R^2}\left(\frac{H_R}{H}\right)^2,$$

где се $(H_R/H)^2$ налази према једначини (42).



Сл. 4

Сви прорачуни извршени су на рачунској машини ELLIOTT 803 B у Инжињерском центру предузећа Енергопројект у Београду.

4. Закључак. — У настојању да се нађе поступак за директно срачунавање струјног поља и облика лопатица које одговарају таквом распореду брзина, разрађен је поступак за прорачун осносиметричног кретања невискозног и нестишљивог флуида, када је унапред прописана једна пројекција струјнице у меридијанској равни и промена брзине дуж те струјнице. Систем парцијалних диференцијалних једначина струјања решава се помоћу редова. Ефективно срачунавање је аутоматизовано израдом програма за електронску дигиталну рачунску машину.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hopkins, D. F., Hill, D. E., *Effect of Small Radius of Curvature on Transonic Flow in Axisymmetric Nozzles*, AIAA Journal, Vol. 4, № 8 (August 1966).

[2] Smith, L. H., *The Radial-Equilibrium Equation of Turbomachinery*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., J. Engineering for Power A 88 (1966) № 1.

[3] H a w t h o r n e, W. R., *Aerodynamics of Turbines and Compressors*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press 1964.

[4] B a m m e r t, K., *Zur Berechnung der Strömung in vielstufigen axialan Turbomaschinen mit beliebiger Beschaufelung*, Forsch. Ing.-Wes. 26 (1960) № 6.

[5] L u k o w s k y, G., *Beitrag zur Theorie der reibungsfreien, axialsymmetrischen räumlichen Strömung in Axialturbinen*, Forsch. Ing.-Wes. 31 (1965) № 1.

[6] С т е п а н о в, Г. Ю., *Гидродинамика решеток турбомашин*, Москва, 1962.

[7] К о л т о н, А. Ю., Э т и н б е р г, И. Э., *Основи теорий и гидродинамического расчета водяных турбин*. Москва, 1958.

[8] К о ч и н, Н. Е., К и б е л ь, И. А., Р о з е, Н. В., *Теоретическая гидромеханика* часть I. Москва 1963.

[9] P e j o v i ć, S., *Investigation of the axially Symmetric Flow of a Frictionless Fluid through Turbomachines*, Matematički vesnik 2 (17) (1965) № 3.

[10] P e j o v i ć, S., *The Equation of Blades of Axial Turbomachines for Free-Vortex Flow*, Matematički vesnik 2 (17) (1965) № 1.

[11] П е ј о в и ћ С., *Осносиметрично струјање кроз турбомашине — једначина површине лопатица*, Математички весник 4 (19) (1967) Нр. 1.

[12] P e j o v i ć, S., *Equations of the Stream Field and the Blade Surfaces of Radial Pumps*, Matematički vesnik 4 (19) (1967) № 2.

[13] P e j o v i ć, S., *Über die Strömung durch Turbomaschinen mit Potential im Meridianschnitt*, Forsch. Ing.-Wes. 34 (1968) № 3.

[14] P e j o v i ć, S., S i m o n o v i ć, V., *Contribution to Axisymmetric Flow through Turbomachines*, ZAMM, Sonderheft (GAMM-Tagung), Band 48 (1968)

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF AXISYMMETRIC FLOW THROUGH TURBOMACHINES

S. Pejović and V. Simonović

S u m m a r y

When analyzing the incompressible axisymmetric flow through turbomachines, the flowfield has been developed for a prescribed velocity distribution along an arbitrary streamline. Each variable is expressed as a series in terms of the stream function, and the fourth order terms are assumed to give an accurate solution. The differential equations of the blade surfaces are then deduced. For the case of constant intake energy they are reduced to one partial differential equation that can be solved as an ordinary differential equation.

Transforming the equations of motion in Lamb's form for steady axisymmetric flow into a new coordinate system with the independent variables — the stream function and velocity potential, — the possibility has been found [1] for the introduction of coordinates having units of length. Each variable of the flowfield is expressed as a series in terms of the stream function. When the stream function is equal to zero, the series of the streamlines are reduced to an arbitrary function which represents a previously prescribed streamline, and the series of the velocity distribution is then reduced to a function representing the desirable prescribed velocity distribution along this streamline. In one example, these two functions are prescribed and approximated with polynomials that are determined by the least square method. The flowfield has been computed with an Elliott 803 B computer.