DK 532.54.001.24 : 62–135–226.2

Über die Strömung durch Turbomaschinen mit Potential im Meridianschnitt

Von **Stanislav Pejović**, Belgrad *)

Zum Berechnen der Strömung durch die Schaufeln einer Turbomaschine wird ein neues Verfahren vorgeschlagen, bei dem man zunächst die radiale und die axiale Geschwindigkeitskomponente aus der Potentialströmung ermittelt, dann die hierzu passende Schaufelform berechnet und schließlich hiermit die tangentiale Geschwindigkeitskomponente der wirbelbehafteten Strömung erhält.

Die Strömung einer rotationssymmetrischen, inkompressiblen Flüssigkeit durch die Schaufelräume von Turbomaschinen ist keine Potentialströmung, da das Produkt $r\,c_u$ aus dem Achsabstand r und der Umfangskomponente c_u der Absolutgeschwindigkeit c nicht konstant sein kann. Im folgenden wird aber gezeigt, daß und wie man die Potentialströmung zum Berechnen einer wirbelbehafteten Strömung ausnutzen kann. Damit erhält die Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung durch Zeichnen der Potential- und der Stromlinien im Meridianschnitt einen theoretischen Nachweis.

Betrachtet werden die Wirbelströmungen, die im Meridianschnitt das gleiche Stromlinienbild wie die Potentialströmung haben. Man kann dann zuerst die Potentialströmung im Meridianschnitt berechnen und danach die Daten der Wirbelströmung ermitteln. Die Analyse der Bewegungsgleichungen liefert die Bedingungen, unter denen sich solche Wirbelströmungen in Turbomaschinen verwirklichen lassen.

1. Kinematische Gleichungen

Die Kontinuitätsgleichung der Strömung inkompressibler Flüssigkeiten lautet in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_u}{\partial \Theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

mit r als dem Achsabstand, Θ als dem Umfangswinkel und z als der axialen Koordinate sowie mit c_r, c_u und c_z als den Komponenten der absoluten Geschwindigkeit c in r-, Θ- und z-Richtung. Die Komponenten Ω_r, Ω_u und Ω_z der Stärke eines Wirbels in Richtung der r-, Θ- und z-Koordinaten lauten

$$\Omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial c_z}{\partial \Theta} - \frac{\partial c_u}{\partial z} \quad (2),$$

$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \quad (3),$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial c_r}{\partial \Theta} \quad (4).$$

Beschränkt man sich auf die rotationssymmetrische Strömung $\left(\frac{\partial}{\partial \Theta} = 0\right)$, so erhält man aus Gl. (1) bis (4) die Beziehungen

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (5),$$

$$\Omega_r = -\frac{\partial c_u}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial z} \quad (6),$$

$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \quad (7),$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial r} \quad (8).$$

*) Der Verfasser war Stipendiat der Alexander-von-Humboldt-Stiftung am Pfleiderer-Institut für Strömungsmaschinen der Technischen Hochschule Braunschweig.

2. Rotationssymmetrische Potentialströmung

Für eine Potentialströmung gilt $\Omega_r = \Omega_u = \Omega_z = 0$ (d. h. wirbelfreie Strömung). Während also Gl. (5) erhalten bleibt, lauten Gl. (6) bis (8)

$$\Omega_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial z} = 0 \quad (9),$$

$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} = 0 \quad (10),$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial r} = 0 \quad (11).$$

Aus Gl. (9) und (11) folgt sofort $r\,c_u = \text{konst}$, d. h. das Produkt aus dem Achsabstand und der Umfangskomponente der absoluten Geschwindigkeit muß konstant sein. Aus Gl. (5) und (10) erhält man die Geschwindigkeiten c_r und c_z. Eine solche Potentialströmung ($\mathfrak{c} = \operatorname{grad} \varphi$ mit $\mathfrak{c}$ als dem Vektor der Absolutgeschwindigkeit und φ als einem Potential) kann nur in den Schaufelfreiräumen der Turbomaschinen bestehen. Durch Auflösen der *Laplaceschen* Gleichung oder mittels des Potentialnetzverfahrens, d. h. durch Aufzeichnen der Äquipotentiallinien und der Stromlinien, läßt sich die Potentialfunktion ermitteln und danach die c_r- und die c_z-Verteilung berechnen.

3. Wirbelströmung

Eine rotationssymmetrische Strömung durch die Schaufelräume von Turbomaschinen kann keine Potentialströmung sein, weil in solchen Räumen immer $r\,c_u \neq \text{konst}$ ist. Die Strömung ohne Umfangswirbelkomponente ($\Omega_u = 0$, d. h. der Wirbelvektor hat nur Komponenten im Meridianschnitt) kann man aber mit Hilfe der entsprechenden Potentialströmung berechnen. Für diesen Fall gelten Gl. (5), Gl. (10) sowie

$$\Omega_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial z} \neq 0 \quad (12),$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,c_u)}{\partial r} \neq 0 \quad (13).$$

Dabei sind Gl. (5) und (10), die ja die Verteilungen von c_r und c_z liefern, identisch mit den Gleichungen für die Potentialströmung. Deshalb haben die Geschwindigkeiten c_r und c_z die gleiche Verteilung bei der Wirbel- und der Potentialströmung und können durch Bestimmen der Strom- oder der Potentialfunktion errechnet werden. Damit ist das Berechnungsverfahren für die Beschaufelungen der Strömungsmaschinen durch Zeichnen der Potential- und der Stromlinien im Meridianschnitt für den Fall als richtig nachgewiesen, daß die Wirbelumfangskomponente null ist.

4. Allgemeine Bewegungsgleichungen

In Zylinderkoordinaten lauten die allgemeine Strömungsgleichung in *Lambscher* Schreibweise und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{2}\right) + c_z\,\Omega_u - c_u\,\Omega_z = f_r - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad (14),$$

$$\frac{\partial c_u}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{c^2}{2}\right) + c_r\,\Omega_z - c_z\,\Omega_r = f_u - \frac{1}{\varrho\, r}\frac{\partial p}{\partial\Theta} \quad (15),$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right) + c_u\,\Omega_r - c_r\,\Omega_u = f_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (16),$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_u}{\partial\Theta} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

mit f_r, f_u und f_z als Komponenten der Feldkraft $\mathfrak{f}$ in r-, Θ- und z-Richtung, ϱ als der Dichte, p als dem örtlichen Druck und t als der Zeit. Beschränkt man sich wieder auf den rotationssymmetrischen, stationären Fall $\left(\frac{\partial}{\partial\Theta} = 0\right.$ und $\left.\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ so gehen Gl. (14) bis (17) in

$$f_r = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{2}\right) + c_z\,\Omega_u - c_u\,\Omega_z \quad (18),$$

$$f_u = c_r\,\Omega_z - c_z\,\Omega_r \quad (19),$$

$$f_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right) + c_u\,\Omega_r - c_r\,\Omega_u \quad (20),$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

über. Die Kontinuitätsgleichung, Gl. (21), ist sowohl bei der Potentialströmung als auch bei der betrachteten Wirbelströmung erfüllt; eine weitere Untersuchung dieser Gleichung erübrigt sich daher.

Die Energiegleichung lautet

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\varrho} - \omega\, r\, c_u = \Phi\,(r, z) \quad (22)$$

mit ω = konst als der Winkelgeschwindigkeit des Laufrads und $\Phi\,(r, z)$ als einer zu jeder Stromfläche gehörigen Konstante, die sich, im allgemeinen Fall, von Stromfläche zu Stromfläche ändert. Setzt man p aus Gl. (22) in Gl. (18) bis (20) ein, so folgt

$$f_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \omega\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial r} + c_z\,\Omega_u - c_u\,\Omega_z \quad (23),$$

$$f_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \omega\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial z} + c_u\,\Omega_r - c_r\,\Omega_u \quad (24),$$

während Gl. (19) für f_u ungeändert bleibt.

5. Bewegungsgleichungen der Potentialströmung

Für die Potentialströmung mit $\Omega_r = \Omega_u = \Omega_z = 0$ und $r\,c_u$ = konst nehmen Gl. (23), (19) und (24) die Form

$$f_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad f_u = 0, \quad f_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (25)$$

sowie die Energiegleichung bis auf eine Konstante, die man mit in $\Phi\,(r, z)$ hineinnehmen kann, die Form

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \Phi\,(r, z) \quad (26)$$

an. Die Gesamtenergie dieser Potentialströmung ändert sich nicht. Eine solche Strömung ist daher für die Untersuchung der Bewegung in Turbomaschinen nicht von Bedeutung.

6. Bewegungsgleichungen der Wirbelströmung

Eine Wirbelströmung, die in Meridianschnitten das gleiche Stromlinienbild wie die Potentialströmung hat, muß die Bedingung $\Omega_u = 0$ erfüllen. Somit erhält man für f_u wieder Gl. (19) und für f_r sowie f_z an Stelle von Gl. (23) und (24)

$$f_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \omega\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial r} - c_u\,\Omega_z \quad (27)$$

bzw.

$$f_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \omega\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial z} + c_u\,\Omega_r \quad (28)$$

mit $\Omega_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial z}$ und $\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r\,c_u)}{\partial r}$. Als Energiegleichung gilt wieder Gl. (22).

Die Lösung dieser Gleichungen ist auf verschiedene Arten möglich. Ein Lösungsverfahren ergibt sich auf folgende Weise. Zuerst werden Gl. (5) und (10) gelöst, die sowohl für die Potentialströmung als auch für die Wirbelströmung gelten. Um die Meridianströmung zu bekommen, die durch Gl. (5) und (10) gegeben ist, muß man noch Gl. (27), (19) und (28) befriedigen, die die Abhängigkeit zwischen den Feldkraftkomponenten f_r, f_u und f_z, der Funktion $\Phi\,(r, z)$ und der Umfangsgeschwindigkeit c_u bestimmen. Die Schaufeln der Turbomaschinen sollen also die Feldkraft $\mathfrak{f}$ mit den Komponenten f_r, f_u, f_z erzeugen, die Gl. (27), (19) und (28) erfüllt. Damit liegen dann auch die nach diesem Verfahren berechneten Geschwindigkeiten im Meridianschnitt vor.

7. Betrachtung der Schaufelgleichung

Im allgemeinen Fall ist die Schaufelflächengleichung eine willkürliche Funktion χ der Koordinaten r, Θ und z gemäß

$$\chi\,(r, \Theta, z) = C \quad (29)$$

mit C als einer Konstante. Durch Einsetzen verschiedener Werte für die Konstante C ergeben sich verschiedene Schaufelflächen. Ist die Strömung reibungslos, so steht die Schaufelkraft in jedem beliebigen Punkt senkrecht auf der Schaufeloberfläche. Darum ergibt sich

$$\mathfrak{f} = \lambda\,(r, z)\,\mathrm{grad}\,\chi\,(r, \Theta, z) \quad (30)$$

mit $\lambda\,(r, z)$ als einer willkürlichen Funktion der Koordinaten r und z. In Zylinderkoordinaten lauten die Feldkraftkomponenten

$$f_r = \lambda\,(r, z)\frac{\partial\chi}{\partial r} \quad (31),$$

$$f_u = \lambda\,(r, z)\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\Theta} \quad (32),$$

$$f_z = \lambda\,(r, z)\frac{\partial\chi}{\partial z} \quad (33).$$

Für eine rotationssymmetrische Strömung ist auch die Feldkraft rotationssymmetrisch. Die Schaufelflächengleichung muß also diese Bedingung erfüllen. Bei einem rotationssymmetrischen Schaufelkraftfeld müssen die Ableitungen der Schaufelkraftkomponenten nach Θ verschwinden, also die Bedingungen

$$\frac{\partial f_r}{\partial\Theta} = \lambda\,(r, z)\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial\Theta} = 0 \quad (34),$$

$$\frac{\partial f_u}{\partial\Theta} = \lambda\,(r, z)\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\Theta^2} = 0 \quad (35),$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial\Theta} = \lambda\,(r, z)\frac{\partial^2\chi}{\partial z\,\partial\Theta} = 0 \quad (36)$$

erfüllt sein. Nun wird Gl. (35) befriedigt, wenn die Funktion χ die Gestalt

$$\chi(r, \Theta, z) = \mu(r, z) - \Theta\, \mu_1(r, z) \quad \ldots \quad (37)$$

mit $\mu(r, z)$ und $\mu_1(r, z)$ als zwei Funktionen von r und z allein hat. Daraus folgen für Gl. (34) und (36) die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r\, \partial \Theta} = -\frac{\partial \mu_1(r, z)}{\partial r} = 0 \quad \ldots \quad (38),$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z\, \partial \Theta} = -\frac{\partial \mu_1(r, z)}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad (39).$$

Aus Gl. (38) und (39) folgt

$$\mu_1(r, z) = K \quad \ldots \quad (40)$$

mit K als einer beliebigen Konstante. Danach hat die Schaufelflächengleichung die Form

$$\chi(r, \Theta, z) = \mu(r, z) - K\, \Theta = C \quad \ldots \quad (41),$$

die recht einfach für die weitere Betrachtung ist, weil die Funktion $\chi(r, \Theta, z)$ jetzt aus zwei Teilen besteht, von denen der erste Teil nur von den Koordinaten r und z und der zweite Teil lediglich linear von der Koordinate Θ abhängt.

Mit χ nach Gl. (41) lauten Gl. (31) bis (33)

$$f_r = \lambda(r, z) \frac{\partial \mu(r, z)}{\partial r} \quad \ldots \quad (42),$$

$$f_u = -\lambda(r, z) \frac{K}{r} \quad \ldots \quad (43),$$

$$f_z = \lambda(r, z) \frac{\partial \mu(r, z)}{\partial z} \quad \ldots \quad (44).$$

Setzt man diese Schaufelkraftkomponenten in Gl. (27), (19) und (28) ein und beachtet weiterhin Gl. (12) und (13) für Ω_r bzw. Ω_z, so folgt

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \mu(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left(\omega - \frac{c_u}{r}\right) \frac{\partial (r\, c_u)}{\partial r} \quad \ldots \quad (45),$$

$$-\lambda(r, z)\, K = c_r \frac{\partial (r\, c_u)}{\partial r} + c_z \frac{\partial (r\, c_u)}{\partial z} \quad \ldots \quad (46),$$

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \mu(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(\omega - \frac{c_u}{r}\right) \frac{\partial (r\, c_u)}{\partial z} \quad \ldots \quad (47).$$

Die Lösung von Gl. (45) bis (47) ergibt die Schaufelflächen. Das Meridianstromlinienbild ist dann das gleiche wie bei der Potentialströmung. Turbomaschinen haben aber keine unendlich große Schaufelzahl. Die Bedingungen der Rotationssymmetrie sind deshalb nicht völlig erfüllt; jedoch bleiben die Abweichungen von der Rotationssymmetrie klein, wie *L. H. Smith* [1] nachgewiesen hat. Man soll jedoch danach streben, daß die über die Umfangskoordinate Θ gebildeten Mittelwerte der Strömungsgrößen die aufgestellten Gleichungen erfüllen.

8. Zusammenfassung

Die Lösung der hergeleiteten Gleichungen ist auf verschiedene Arten möglich. Ein Lösungsverfahren besteht in Folgendem. Zuerst löst man Gl. (5) und (10), die gleichermaßen für die Potentialströmung und die Wirbelströmung gelten, und erhält so die Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten c_r und c_z. Führt man die Potentialfunktion φ und die Stromfunktion ψ nach den Gleichungen

$$c_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \ldots \quad (48),$$

$$c_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \ldots \quad (49)$$

ein, so läßt sich die Lösung von Gl. (5) und (10) entweder mittels der *Laplaceschen* Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \ldots \quad (50)$$

für die Potentialfunktion oder mittels der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \ldots \quad (51)$$

für die Stromfunktion finden. Wenn die Radial- und die Axialgeschwindigkeitskomponenten $c_r(r, z)$ und $c_z(r, z)$ bekannt sind, muß man Gl. (45) bis (47) lösen, um die unbekannten Funktionen $\mu(r, z)$ und $\lambda(r, z)$ sowie die Konstante K, die die Schaufelform kennzeichnen, und die Umfangsgeschwindigkeitskomponente $c_u(r, z)$ zu bestimmen. Die Funktion $\Phi(r, z)$ ist durch die Anfangsbedingungen vor der Beschaufelung nach der Energiegleichung (Gl. (22)) gegeben. Einige spezielle Lösungen des angegebenen Gleichungssystems, die aber nach einem viel verwickelteren Verfahren gefunden worden sind, kann man aus [2 bis 4] entnehmen.

9. Schrifttum

[1] *Smith, L. H.:* The radial-equilibrium equation of turbomachinery. Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., J. Engineering for Power **A 88** (1966) Nr. 1 S. 1/12.

[2] *Pejović, S.:* The equation of blades of axial turbomachines for free-vortex flow. Matematički vesnik **2** (17) (1965) Nr. 1 S. 49/58.

[3] *Pejović, S.:* Osnosimetrično strujanje kroz turbomašine — jednačina površine lopatica (Orig. serbokroatisch). Matematički vesnik **4** (19) (1967) Nr. 1 S. 39/46.

[4] *Pejović, S.:* Equations of the stream field and the blade surfaces of radial pumps. Matematički vesnik **4** (19) (1967) Nr. 2 S. 113/18.

[5] *Hawthorne, W. R.:* Aerodynamics of turbines and compressors. Princeton u. New Jersey: Princeton University Press 1964.

[6] *Kocin, N. E., I. A. Kibel* u. *N. B. Roze:* Teoreticeskaja gidromehanika, cast I. Moskau 1963.

[7] *Bammert, K.:* Zur Berechnung der Strömung in vielstufigen axialen Turbomaschinen mit beliebiger Beschaufelung. Forsch. Ing.-Wes. **26** (1960) Nr. 6 S. 179/84.

[8] *Lukowsky, G.:* Beitrag zur Theorie der reibungsfreien, axialsymmetrischen räumlichen Strömung in Axialturbinen. Forsch. Ing.-Wes. **31** (1965) Nr. 1 S. 1/10.

[9] *Pejović, S.:* Investigation of the axially symmetric flow of a frictionless fluid through turbomachines. Matematički vesnik **2** (17) (1965) Nr. 3 S. 199/201.

Eingegangen am 3. 3. 1967 F 1974