Stanislav Pejović

PRILOG OPŠTOJ TEORIJI PROSTORNOG OSNOSIMETRIČNOG STRUJANJA KROZ TURBOMAŠINE

BEOGRAD
1 9 6 2

S A D R Ž A J

U V O D

Strujanje kroz turbomašine uvek je prostorno i praćeno je gubicima energije, jer se fluidni delići kreću jedni prema drugima i prema zidovima kanala nejednakim brzinama, usled čega trenje dolazi do izražaja. S tog razloga se svi uticaji ne mogu potpuno obuhvatiti analitičkim izrazima, ali i ako bi se u tome uspelo, dobijeni izrazi bili bi veoma komplikovani a rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina složeno. Zbog toga se čine pretpostavke kojima se uprošćuju složeni matematički izrazi.

Ako su elementi turbomašine dobrog aerodinamičnog oblika, fluid se neće odvajati od čvrstih graničnih površina i neće se stvarati vrtlozi. Viskoznost će, kod ovakvog strujanja, dolaziti do izražaja jedino u graničnom sloju koji se formira na čvrstim površinama duž kojih se fluid kreće. U dobro izvedenim kanalima, kada se granični sloj ne odlepljuje od zidova, "živa struja" zauzima znatno veći deo protočnog preseka. Kod ubrznog strujanja granični sloj je tanak. Usporno strujanje je nepovoljnije jer postoji opasnost od odlepljivanja graničnog sloja uz pojavu vrtloga. Ako su kanali dobro izvedeni, uticaj viskoznosti je ograničen na veoma usku zonu graničnog sloja, u blizini čvrstih površina, i može se zanemariti u odnosu na "živu struju". Sa gledišta mehanike fluida i matematike to znači da umesto Navije (Navier) - Stoksovih (Stokes) parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda za kretanje viskoznog fluida, sa zadovoljavajućom tačnošću mogu se upotrebiti Ojlerove (Euler) parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda, kojima se ne uzimaju u obzir sile viskoznosti.

Za tačno proučavanje procesa strujanja kroz turbomašine treba znati kako se fluid kreće kroz svaki kanal, i kroz delove kanala. U turbomašinama, uslovi strujanja se razlikuju uz glavčinu i uz kućicu, tako da nije dovoljno poznavati strujanje samo na srednjem prečniku, kako se to obično čini kada su lopatice male (naprimer kod parnih turbina). To znači da treba znati kako se meridijanske strujnice rasporedjuju, ili, što je ekvivalentno, kakvo je polje meridijanskih brzina.

Strogo posmatrano, strujanje je uvek prostorno, i ima brzine koje se menjaju čim se promeni bilo koja koordinata usvojenog sistema. Za posmatranje promena strujnih veličina kroz turbomašine pokazao se u mnogim slučajevima pogodan cilindarski koordinatni sistem čija osa $\underline{z}$ pada u osu vratila mašine. U tom sistemu, svi parametri zavise od tri koordinate: potega $\underline{r}$, polarnog ugla $\underline{\varphi}$ i aksijalnog položaja $\underline{z}$ (kota). Medjutim, ako se pretpostavi da strujanje ima osnu simetriju, znatno se uprošćuju jednačine kojima se opisuje strujanje, ne smanjujući pritom značaj dobijenih rezultata. Samo treba reći da je odstupanje od osne simetrije utoliko veće ukoliko je manji broj lopatica. Kako je broj lopatica retko sasvim mali, to se veoma često strujanje može da smatra osnosimetričnim. U matematičkom pogledu se prostorno strujanje time svede na strujanje kroz meridijanske ravni ($\underline{\varphi}$ = const.) a brzine i veličine stanja fluida ne menjaju se sa promenom polarnog ugla $\underline{\varphi}$.

U ovom radu se polazi od vektorne Ojlerove jednačine za kretanje savršenog fluida, napisane u pogodnom obliku za osnosimetrično strujanje a upotrebljuje se sistem koji ima za koordinate: dužinu luka meridijanske projekcije strujnice, dužinu luka normale na meridijanske projekcije strujnica u meridijanskoj ravni i polarni ugao. Uspelo je da se na taj način teorija o strujanju stišljivog fluida dovede gotovo do opsega koji odgovara teoriji o strujanju nestišljivog fluida. Izvodjenja i transformacije jednačina sprovedeni su uporedo i za stišljiv i za nestišljiv fluid. Ako postoji kakva razlika medju njima, onda se prvo posmatra strujanje nestišljivog fluida a odmah zatim stišljivoga. Tamo gde razlike nema, analiza se vrši samo jednom i odnosi se na obe vrste fluida. Ovakav način izlaganja usvojen je zato da bi se lakše uočila velika sličnost koja postoji u izvodjenju rezultata za obe vrste strujanja.

U toku rada se pokazalo najpogodnije da se direktni problem (poznat oblik lopatica) rešava u pokretnom koordinatnom sistemu, koji se zamišlja vezan za kolo turbomašine i zajedno sa njim se obrće istom ugaonom brzinom. Jednačine za odredjivanje potrebnih strujnih veličina kada se rešava inverzni problem (proračun lopatica) vezuje se za nepokretni koordinatni sistem.

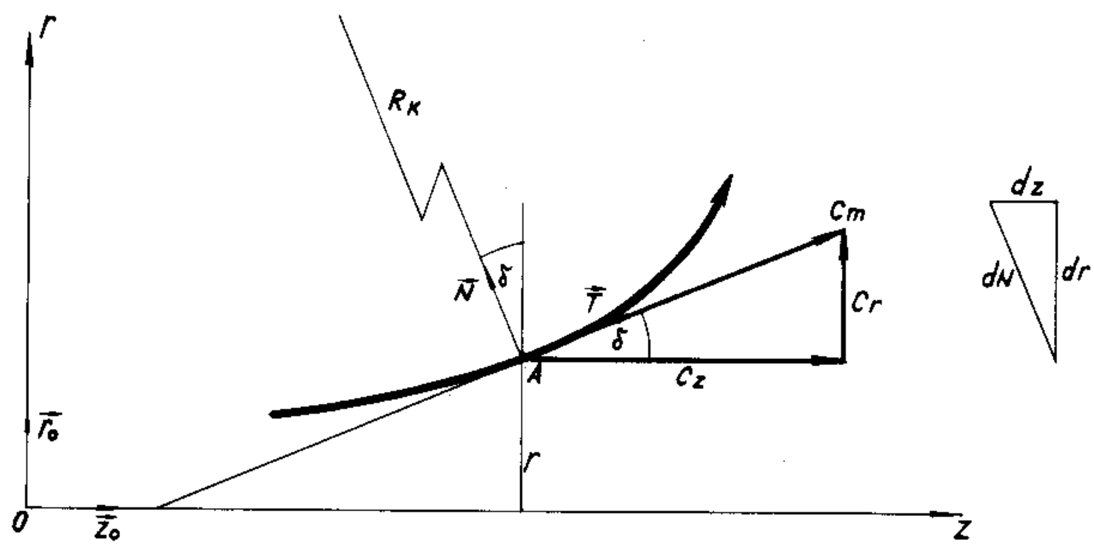
1. POSTAVLJANJE PROBLEMA

1.1. OJLEROVE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Ojlerova diferencijalna jednačina za kretanje savršenog fluida u vektornom obliku glasi /4/[1]

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{1.1}$$

gde je sa $\vec{a}$ označeno ubrzanje fluidnog delića, sa $\vec{F}$ zapreminska sila koja se računa za jedinicu mase, sa ρ gustina fluida i sa p apsolutni pritisak. Da bi se jednačina (1.1) napisala u skalarnom obliku, pogodnom za analizu osnosimetričnog strujanja, uvešće se krivolinijske koordinate (Sl. 1.1), i to: dužina luka



Sl. 1.1. Meridijanska projekcija strujnice

1) Brojevi u zagradi odnose se na literaturu navedenu na kraju teksta.

meridijanske projekcije strujnice (T), dužina normale ovih strujnica (N) i polarni ugao (φ), koji se definiše na isti način kao i u cilindarskom koordinatnom sistemu. Meridijanske projekcije strujnica su linije koje nastaju presecanjem strujnih površi meridijanskim ravnima, i ubuduće će se kratko nazivati meridijanskim strujnicama. Kako se proračunava osnosimetrično strujanje, to su strujne površi simetrične prema osi, i mogu se dobiti obrtanjem meridijanskih strujnica oko ose z za pun ugao.

Da bi se sad napisali izrazi za ubrzanje delića, obeležiće se sa c njegova apsolutna brzina a indeksima r, u i z, redom, radijalni, kružni i osni pravac cilindarskog koordinatnog sistema. U tim pravcima su projekcije ubrzanja $\vec{a}$ jednake /19/

$$a_r = \dot{c}_r - \frac{c_u^2}{r}, \tag{1.2}$$

$$a_u = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rc_u) = \dot{c}_u + \frac{c_r c_u}{r}, \tag{1.3}$$

$$a_z = \dot{c}_z. \tag{1.4}$$

Napominje se da r predstavlja rastojanje uočenog fluidnog delića od ose z, da je t vreme i da tačka iznad slova označuje izvod po vremenu.

Nek su zatim $\vec{T}$, jedinični vektor tangente na meridijanskoj strujnici, $\vec{r}_o$ jedinični vektor radijalnog i $\vec{z}_o$ jedinični vektor osnog pravca; tada je meridijanska brzina $\vec{c}_m$ odredjena jednačinom (v. sl. 1.1)

$$\vec{c}_m = c_m\vec{T} = c_r\vec{r}_o + c_z\vec{z}_o. \tag{1.5}$$

Iz toga izlazi da je

(1.6) $$c_m^2 = c_r^2 + c_z^2.$$

Krivina meridijanske strujnice dana je poznatim izrazom /17/

(1.7) $$K = \frac{1}{R_k} = \frac{\dot{c}_r c_z - \dot{c}_z c_r}{c_m^3}.$$

Iz slike 1.1 sleduju geometrijske veze:

(1.8) $$\cos\delta = \frac{c_z}{c_m}$$

i

(1.9) $$\sin\delta = \frac{c_r}{c_m},$$

pa se zato za jedinični vektor pravcem tangente na meridijanskoj strujnici dobija izraz

(1.10) $$\vec{T} = \sin\delta\,\vec{r}_o + \cos\delta\,\vec{z}_o = \frac{c_r}{c_m}\,\vec{r}_o + \frac{c_z}{c_m}\,\vec{z}_o.$$

Slično tome se nalazi za pravac normale

(1.11) $$\vec{N} = \cos\delta\,\vec{r}^o - \sin\delta\,\vec{z}_o = \frac{c_z}{c_m}\,\vec{r}_o - \frac{c_r}{c_m}\,\vec{z}_o.$$

Pošto se sad diferencira jednačina (1.6) po vremenu t, i dobije se rezultat

(1.12) $$c_m\dot{c}_m = c_r\dot{c}_r + c_z\dot{c}_z,$$

mogu se odrediti projekcije ubrzanja na sva tri medjusobno upravna pravca označena jediničnim vektorima $\vec{T}$, $\vec{N}$ i $\vec{c}_o$ krivolinijskog koordinatnog sistema. Prema (1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.10), (1.11) i (1.12) nalazi se da je

$$a_T = (\vec{a}\cdot\vec{T}) = a_r \sin\delta + a_z \cos\delta ,$$

$$a_N = (\vec{a}\cdot\vec{N}) = a_r \cos\delta - a_z \sin\delta ,$$

odnosno da je

$$a_T = \dot{c}_m - \frac{c_u^2}{r} \sin\delta , \tag{1.13}$$

$$a_N = \frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r} \cos\delta , \tag{1.14}$$

$$a_u = \dot{c}_u + \frac{c_r c_u}{r}. \tag{1.15}$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (1.13) predstavlja ubrzanje koje nastaje usled promene meridijanske brzine dok je drugi član projekcija centrifugalnog ubrzanja u pravcu tangente na meridijanskoj strujnici koja se javlja kao posledica kružne brzine c_u.

Prvi član na desnoj strani jednačine (1.14) predstavlja centrifugalno ubrzanje pri meridijanskom kretanju delića tj. ubrzanje duž meridijanske strujnice koja na posmatranom mestu ima poluprečnik krivine R_k. Drugi član jednačine (1.14) projekcija je centrifugalnog ubrzanja kružne brzine c_u pravcem normale meridijanskih strujnica.

Ubrzanje $\underline{a_u}$, na koje se odnosi jednačina (1.15), poznato je kao kružno ubrzanje, a ima istu vrednost kao i u cilindarskom koordinatnom sistemu.

Razlaganjem Ojlerove jednačine za kretanje savršenog fluida (1.1) pravcem tangente $\vec{\underline{T}}$, normale $\vec{\underline{N}}$ i kružne linije, dolazi se do jednačina

$$\dot{c}_m - \frac{c_u^2}{r} \sin\delta = F_T - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial T}, \tag{1.16}$$

$$\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r} \cos\delta = F_N - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial N}, \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rc_u) = F_u - \frac{1}{\varrho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}. \tag{1.18}$$

Svud je sa $\underline{T}$ označen luk meridijanske strujnice, a sa $\underline{N}$ luk normale na meridijanske strujnice.

U jednačinama (1.16), (1.17) i (1.18), $\underline{F_T}$, $\underline{F_N}$, i $\underline{F_u}$ redom su projekcije sile $\vec{\underline{F}}$ u pravcu tangente meridijanske strujnice, u pravcu normale na meridijanske strujnice i u pravcu kružne linije. Poslednji član na desnoj strani ovih jednačina predstavlja projekcije gradijenta pritiska pravcem odgovarajućih jediničnih vektora osa usvojenog koordinatnog sistema.

Diferencijalne jednačine (1.16), (1.17) i (1.18) važe za strujanje stišljivog i nestišljivog fluida jer nisu ograničene nikakvim novim pretpostavkama. Prema tome one važe za iste uslove pod kojima je izvedena i Ojlerova diferencijalna jednačina za kretanje savršenog fluida (1.1).

Ojlerova jednačina (1.1) može se napisati i u odnosu na pokretni koordinatni sistem koji se zamišlja da je vezan za kolo turbomašine i da se s kolom okreće konstantnom ugaonom brzinom $\underline{\omega}$. Pokretni cilindarski koordinatni sistem postaviće se tako da ima zajedničku osu $\underline{z}$ s malopre definisanim nepokretnim sistemom. Ako se sa $\underline{w}$ obeleži relativna brzina a sa $\underline{\omega}$ ugaona brzina - kojom se okreće vratilo turbomašine - onda izmedju apsolutne brzine $\vec{\underline{c}}$ i relativne brzine $\vec{\underline{w}}$ postoji veza (v.sl.1.2)

$$\vec{c} = \omega r \vec{c}_o + \vec{w}. \tag{1.19}$$

Takodje je (v.sl. 1.3)

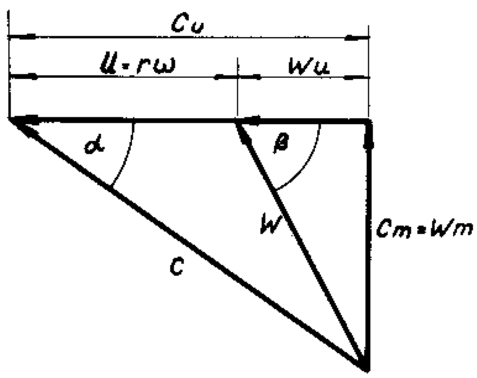
$$c_r = w_r,\ c_u = w_u + \omega r,\ c_z = w_z,\ c_m = w_m,\ (w_r = \dot{r}). \tag{1.20}$$

Zbog ovakvih odnosa predstavlja slika 1.1 i relativne meridijanske strujnice. Pri stacionarnom strujanju je ugaona brzina nepromenljiva tokom vremena ($\underline{\omega}$ = const.) Ako se uvedu projekcije apsolutne brzine po jednačinama (1.20) u jednačine (1.13), (1.14) i (1.15) dobiće se projekcije apsolutnog ubrzanja kao funkcije relativnih brzina, u vidu izraza

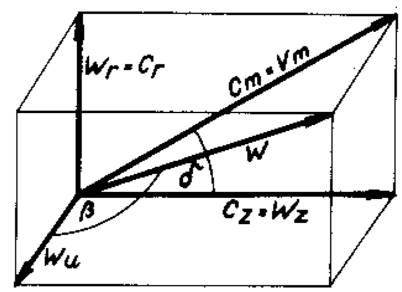
$$a_T = \dot{w}_m - \frac{(w_u + \omega r)^2}{r} \sin\delta\,, \tag{1.21}$$

$$a_N = \frac{w_m^2}{R_k} - \frac{(w_u + \omega r)^2}{r} \cos\delta\,, \tag{1.22}$$

$$a_u = \dot{w}_u + \frac{w_u w_r}{r} + 2 w_r \omega\,. \tag{1.23}$$



Sl. 1.2 Trougao brzina



Sl. 1.3 Paralelogram relativnih brzina

Ako se obeleži sa β ugao izmedju relativne brzine i njene obimske projekcije, videće se iz slike 1.3 da je

(1.24) $$\cos\beta = \frac{w_u}{w}, \text{ odnosno } w_u = w\cos\beta$$

i da je

(1.25) $$\sin\beta = \frac{w_m}{w}, \text{ sa } w_m = w\sin\beta \,.$$

Prema (1.9), (1.20) i (1.25) jeste

(1.26) $$w_r = w_m \sin\delta = w \sin\delta \sin\beta \,,$$

zbog čega jednačine (1.21), (1.22) i (1.23) prelaze u

(1.27) $$a_T = \dot{w}\sin\beta + w\cos\beta\,\dot{\beta} - \frac{(w\cos\beta + \omega r)^2}{r}\sin\delta \,,$$

(1.28) $$a_N = \frac{w^2}{R_k}\sin^2\beta - \frac{(w\cos\beta + \omega r)^2}{r}\cos\delta ,$$

(1.29) $$a_u = \dot{w}\cos\beta - w\sin\beta\dot{\beta} + \frac{w^2}{r}\sin\delta\sin\beta\cos\beta + 2w\omega\sin\delta\sin\beta .$$

Pošto se Ojlerova jednačina (1.1) rastavi na tri skalarne jednačine, i to redom u pravcu tangente meridijanskih strujnica $\vec{T}$, u pravcu normale na meridijanske strujnice $\vec{N}$ i u pravcu kružne linije, dobija se

(1.30) $$\dot{w}\sin\beta + w\cos\beta\dot{\beta} - \frac{(w\cos\beta + \omega r)^2}{r}\sin\delta = F_T - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial T},$$

(1.31) $$\frac{w^2}{R_k}\sin^2\beta - \frac{(w\cos\beta + \omega r)^2}{r}\cos\delta = F_N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N}$$

(1.32) $$\dot{w}\cos\beta - w\sin\beta\dot{\beta} + \frac{w^2}{r}\sin\delta\sin\beta\cos\beta + 2w\omega\sin\delta\sin\beta = F_u - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Ove jednačine su ekvivalentne jednačinama (1.16), (1.17) i (1.18), jer predstavljaju projekcije iste vektorne jednačine u dva različita koordinatna sistema. S tog razloga upotrebiće se uvek jednačine koje su u posmatranom slučaju pogodnije za analizu strujanja. Jednačine (1.16), (1.17) i (1.18) iskoristiće se za rešavanje inverznog problema a jednačine (1.30), (1.31) i (1.32) za analizu direktnog problema.

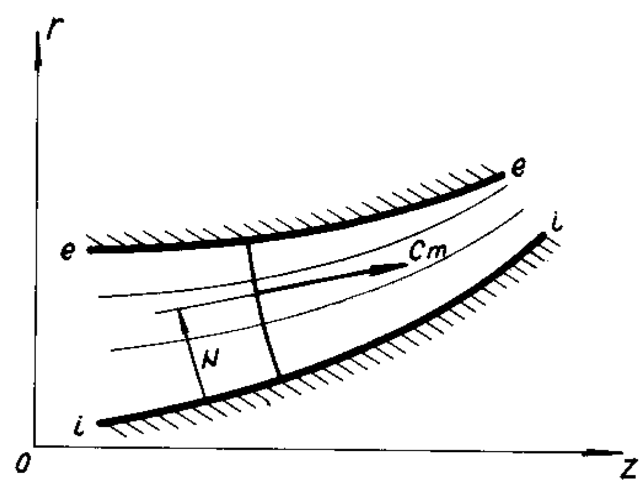
1.2. POSEBNE JEDNAČINE

U daljem tekstu upotrebiće se još neke jednačine poznate iz teorije turbomašina, termodinamike i mehanike fluida.

Protok će se sračunavati prema jednačini

$$\dot{G} = 2g\pi \int_0^N \rho\, w \sin\beta \;\; r\, dN = 2g\pi \int_0^N \rho\, c \sin\alpha \;\; r\, dN, \tag{1.33}$$

gde je sa $\dot{G}$ označen težinski protok fluida a sa g ubrzanje zemne teže. Ugao α sklapa pozitivna obimska brzina s pozitivnom apsolutnom brzinom (v.sl. 1.2) a N označuje rastojanje pojedinih tačaka na normali meridijanskih strujnica (v.sl. 1.4) počevši od unutrašnje granične meridijanske strujnice (i-i glavčina).



Sl. 1.4. Meridijanski presek

U skladu s pretpostavljenim adijabatskim strujanjem neviskoznog idealnog fluida analiziraju se izentropiske promene stanja. Zna se da u ovom slučaju važi jednačina

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \text{const.} \tag{1.34}$$

Osnovna jednačina za turbomašine (Ojlerova jednačina):

$$h = \frac{1}{g}(\omega r c_u - \omega r_o c_{ou}), \tag{1.35}$$

važi i za stišljivi i za nestišljivi fluid, s tim što $\underline{h}$ predstavlja jedinični rad kola, jednak ujedno jediničnom radu struje, jer se posmatra strujanje bez trenja. Kada se fluidu dovodi energija, što se čini u neturbinama (kompresori, pumpe, ventilatori), jedinični rad $\underline{h}$ je pozitivan. Ako se energija fluida smanjuje jedinični rad je negativan, i u tom slučaju se jednačina (1.35) odnosi na turbine. Ojlerova jednačina važi za svaku strujnicu, a napominje se da strujnice ne menjaju svoj oblik i položaj tokom vremena, jer se posmatra ustaljeno strujanje. Stoga $\underline{r_o}$ predstavlja rastojanje od ose $\underline{z}$, a $\underline{c_{ou}}$ kružnu brzinu, ma koje tačke strujnog prostora gde je strujanje poznato. Obično se zna strujanje na ulasku fluida u turbomašinu ili pred ulaskom u kolo turbomašine. U opštem slučaju, jedinični rad kola se menja pravcem tangente i normale meridijanskih strujnica, dok pravcem kružne linije ima konstantnu vrednost pošto je reč o osnosimetričnom strujanju.

Tehnički rad, koji je u stanju da izvrši jedinica količine fluida (jedinični rad struje) pri kvazistatičnim adijabatskim promenama stanja, iznosi /14/:

$$d\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} - g\,dh = 0, \qquad (1.36)$$

s tim što je ovde h jedinični rad struje. Za neturbine je $dh > 0$ jer se povećava energija fluida; u turbinama se smanjuje energija fluida pa je $dh < 0$. Iz jednačine (1.36) izostavljen je član kojim se izražava promena položajne energije, jer je za gasove zanemarljivo mali prema ostalim članovima zbog male specifične težine gasa. Kada su tečnosti u pitanju, tad se promena položajne energije ne može uvek da zanemari već prvo treba ispitati vrednost razlike. Pri analizi fluidnih strujanja kroz toplotne turbomašine, obično autori zanemaruju uticaj zemne teže. Ali uticaj teže na hidraulične turbomašine može se zanemariti kada su preseci, izmedju kojih se posmatra strujanje, na malom vertikalnom rastojanju.

Za proračun strujanja nestišljivog fluida, svodi se jednačina (1.36), zbog ρ = const., na

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gh = \frac{c_o^2}{2} + \frac{p_o}{\rho_o} = H_o. \qquad (1.37)$$

Izentropisko strujanje stišljivog fluida upravlja se prema jednačini:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} - gh = \frac{c_o^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_o}{\rho_o} = H_o, \qquad (1.38)$$

koja se dobija integraljenjem diferencijalne jednačine (1.36) vodeći računa o vezi (1.34). Ukupna energija struje H_o, na mestu O – O, konstantna je veličina za jednu strujnicu, ali ona u opštem slučaju ne mora biti ista za sve strujnice. Iz Jednačina

(1.37) i (1.38) zaključuje se da $\underline{H_o}$ predstavlja totalnu energiju tj. zbir kinetične i potencijalne energije fluidne struje, izraženu jedinicama kvadrata brzine (m^2/s^2), u tački strujnog prostora koja se nalazi u preseku O – O, gde se strujanje smatra poznatim.

U radnom prostoru turbomašine menja se energija fluidne struje pravcem toka. U turbinama se ona smanjuje ($\underline{h} < 0$) a u neturbinama se povećava ($\underline{h} > 0$). Ako se jedinični rad (v. jednačinu (1.35)) uvede u jednačine energije dobiće se pogodniji izrazi. Tako se za nestišljiv fluid – prema (1.35) i (1.37) – nalazi da je

$$(1.39) \qquad \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \omega r c_u = H_o - \omega r_o c_{ou} = H,$$

i za stišljivi fluid, kad se ima u vidu (1.35) i (1.38), dobija se

$$(1.40) \qquad \frac{c^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} - \omega r c_u = H_o - \omega r_o c_{ou} = H.$$

Pri ustaljenom kretanju fluida ne menjaju strujnice ni oblik ni položaj; vektor brzine i ugaona brzina imaju stalnu vrednost, te i proizvod $\underline{\omega r_o c_{ou}}$ ostaje stalan za svaku strujnicu. Stoga se zaključuje da je razlika $\underline{H} = \underline{H_o} - \underline{\omega r_o c_{ou}} = \text{const.}$ duž svake strujnice, kao i duž njene meridijanske projekcije, ali se prelaskom na susednu strujnicu vrednost za $\underline{H}$ može promeniti. U tom slučaju je $\underline{H} = \underline{H}(\underline{\Psi})$.

Iz trougla brzina (v.sl. 1.2) sleduje da je

$$(1.41) \qquad w^2 = c^2 + u^2 - 2\omega r c_u.$$

Ako se odatle sračuna proizvod $\underline{\omega r c_u}$ pa se zameni u jednačini

(1.39) dobiće se jednačina

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2 - u^2}{2} = H, \tag{1.42}$$

koja važi za kretanje nestišljivog fluida. Zamenom $\omega r c_u$ iz (1.41) u (1.40) dobija se jednačina energije za strujanje stišljivog fluida u obliku

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{w^2 - u^2}{2} = H. \tag{1.43}$$

Pri proračunavanju strujanja kroz turbomašine raspolaže se trima skalarnim Ojlerovim diferencijalnim jednačinama za kretanje fluida, jednačinom kontinuiteta, osnovnom jednačinom za turbomašine (Ojlerova jednačina), jednačinom energije i jednačinom za promenu stanja fluida. Nepoznate veličine, koje treba odrediti jesu: tri projekcije brzine, pritisak i gustina. Iz sedam takvih jednačina nužno je da se nadju pet nepoznatih, što je u ovom slučaju moguéno, zato što su jednačine medju sobom zavisne. Iz tri Ojlerove diferencijalne jednačine za kretanje savršenog fluida može se izvesti osnovna jednačina za turbomašine i jednačina energije. Prema tome, od sedam jednačina treba odabrati pet nezavisnih, pa iz njih izračunati pet nepoznatih veličina. U daljem radu se upotrebljuje jedna od tri skalarne Ojlerove jednačine za kretanje savršenog fluida, i to (1.17) ili (1.31), zatim jednačina kontinuiteta, jednačina energije, jednačina za promene stanja i osnovna jednačina za turbomašine. Jednačina (1.17) iskoristiće se za rešavanje inverznog problema a jednačina (1.31) za rešavanje direktnog problema.

2. INTEGRAL DUŽ NORMALE MERIDIJANSKIH STRUJNICA

2.1. INVERZNI PROBLEM

U ovom slučaju nužno je naći jednačinu prema kojoj bi se strujanje upravljalo kad je na neki način propisan jedinični rad struje h. Postupiti se može ovako.

Diferencira se po N jednačina energije (1.39), koja važi za strujanje nestišljivog fluida (ρ = const.), a dobija se

$$c \frac{\partial c}{\partial N} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N} - \omega \frac{\partial}{\partial N}(rc_u) = \frac{\partial H}{\partial N}.$$

Jednačina (1.6), diferencirana po N, prelazi u

$$c \frac{\partial c}{\partial N} = c_m \frac{\partial c_m}{\partial N} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial N},$$

te zamenom $c \frac{\partial c}{\partial N}$ u prethodnoj jednačini, izlazi da je

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial N} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial N} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N} - \omega \frac{\partial}{\partial N}(rc_u) = \frac{\partial H}{\partial N}. \tag{2.1}$$

Od izvanrednog je značaja pokazati da ova jednačina važi i za izentropiske strujanje stišljivog fluida. Radi toga se diferencira jednačina (1.40) po N, a sleduje

$$c \frac{\partial c}{\partial N} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \omega \frac{\partial}{\partial N}(rc_u) = \frac{\partial H}{\partial N}.$$

Drugi član na levoj strani ove jednačine može se preinačiti, vodeći pritom računa da je za izentropisku promenu stanja $p/\rho^{\varkappa} = K = \text{const.}$, jer sleduje da je izraz

$$(2.1') \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} K^{1/\varkappa} \frac{\partial}{\partial N} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} =$$

$$= K^{1/\varkappa} p^{-1/\varkappa} \frac{\partial p}{\partial N} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N},$$

zbog čega prethodna jednačina prelazi u

$$c\frac{\partial c}{\partial N} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N} - \omega\frac{\partial}{\partial N}(rc_u) = \frac{\partial H}{\partial N}.$$

Pošto se još $c\frac{\partial c}{\partial N}$, zameni sa $c_m\frac{\partial c_m}{\partial N} + c_u\frac{\partial c_u}{\partial N}$, dobija se upravo malopredjašnja jednačina (2.1). Time je dokazano da ista jednačina važi za strujanje i stišljivog i nestišljivog fluida. Posle ovog dokaza uzeće se izraz $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N}$ iz jednačine (1.17), koja je opšta, i opisuje strujanje stišljivog i nestišljivog fluida - pa će se ovaj izraz zameniti u jednačini (2.1) a dobiće se diferencijalna jednačina (koja se može primeniti na strujanje barotropnog fluida što je pokazano u dodatku I)

$$(2.2) \qquad c_m\frac{\partial c_m}{\partial N} - \frac{c_m^2}{R_k} + c_u\frac{\partial c_u}{\partial N} + \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - \omega\frac{\partial}{\partial N}(rc_u) + F_N - \frac{\partial H}{\partial N} = 0.$$

Član F_N predstavlja spoljašnje zapreminske sile koje deluju na sistem u pravcu normale meridijanskih strujnica, te u sebi sadrži silu teže i sile koje stvaraju lopatice. Dejstvo lopatica može se zameniti zapreminskim silama, neprekidno rasporedjenim u strujnom prostoru, kada je strujanje osnosimetrično. Pretpostavka da su sile koje stvaraju lopatice zapreminske, ekvivalentna je sa pretpostavkom da u strujnom prostoru ima neizmerno mnogo neizmerno tankih lopatica. Sila teže se može zanemariti, o čemu je već bilo govora u odeljku 1.2, ali se u nekim slučajevima može zanemariti i sila kojom lopatice deluju na fluid pravcem normale N. Tako naprimer, Holmkvist (Holmquist) i Reni (Rannie) /1/ proučavajući strujanje kroz aksijalne turbomašine navode ispitivanja Karlsona (Karlsson) /18/, koji je došao do zaključka da je ova sila pravcem normale zanemarljivo mala. Traupel (Traupel) /13/ takodje smatra da se ova sila često može zanemariti, ali da ponekad može biti od uticaja. Ovo se naročito može ticati francisovskih vodnih turbina čije kolo ima vrlo krive lopatice.

Ako je $F_N = 0$, onda je s obzirom na vezu (v. sl. 1.1 desno)

$$dr = dN \cos\delta , \tag{2.3}$$

jasno da jednačina (2.2) prelazi u jednostavniji oblik

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial N} - \frac{c_m^2}{R_k} + \left(\frac{c_u}{r} - \omega\right) \frac{\partial}{\partial N}(rc_u) - \frac{\partial H}{\partial N} = 0. \tag{2.4}$$

Realno je da se pretpostavi da su poznate sve veličine izuzev brzine c_m, a onda se za rešenje diferencijalne jednačine (2.4) dobija

$$c_m = e^{\int_0^N \frac{dN}{R_k}} \left\{ c_{mi}^2 - 2\int_0^N \left[\left(\frac{c_u}{r} - \omega\right) \frac{\partial}{\partial N}(rc_u) - \frac{\partial H}{\partial N}\right] e^{-2\int_0^N \frac{dN}{R_k}} dN \right\}^{1/2} . \tag{2.5}$$

Pritom se smatra da je zadana meridijanska brzina c_{mi} (integralska konstanta) na mestu $N = 0$, odakle počinje da se traži vrednost integrala. Sled promene $\underline{c_u}$ i $\underline{H}$ mora se posebno usloviti (inverzni problem). Poluprečnik krivine $\underline{R_k}$, i poluprečnik $\underline{r}$, prvo se pretpostave kao da su poznate funkcije, a zatim se ova pretpostavka proverava (o tome će se kasnije još raspravljati).

Jednačina (2.5) može se iskoristiti za proračun strujanja i stišljivog i nestišljivog fluida jer su njenom izvodjenju poslužile jednačine koje važe za obe vrste fluida. Napominje se da se uz pomoć ove jednačine može proračunavati strujanje i kroz turbine i kroz neturbine.

Po obliku je sličnu jednačinu sa (2.5) izveo M. Štšelecki (M. Strscheletzky) /9/ za strujanje nestišljivog fluida kroz nepokretne kanale ($\underline{\omega} = 0$). Očevidno je da njegov rezultat predstavlja samo jedno partikularno rešenje malopredjašnje opšte jednačine (2.5).

2.2 DIREKTNI PROBLEM

U ovom slučaju se traži jednačina koja će se iskoristiti za proračun strujanja kada se zna oblik lopatica. Ta jednačina se izvodi diferenciranjem po $\underline{N}$ jednačine energije (1.42), koja važi za strujanje nestišljivog fluida ($\underline{\rho}$ = const.), a vodi se računa o izrazu (2.3) i o tome da je $\underline{u} = \underline{\omega r}$ sa $\underline{\omega}$= const. Rezultat glasi

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial N}(\omega^2 r^2) - w\frac{\partial w}{\partial N} + \frac{\partial H}{\partial N} =$$

$$= \omega^2 r\frac{\partial r}{\partial N} - w\frac{\partial w}{\partial N} + \frac{\partial H}{\partial N},$$

$$(2.6) \qquad \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial N} = \omega^2 r \cos\delta - w\,\frac{\partial w}{\partial N} + \frac{\partial H}{\partial N},$$

a suštinski predstavlja promenu pritiska u struji pravcem normale na meridijanske strujnice pri ustaljenom strujanju.

Interesantno je da ova jednačina važi i za izentropiske strujanje stišljivog fluida. To će se uvideti pošto se jednačina energije (1.43) za strujanje stišljivog fluida diferencira po N jer sleduje

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{p}{\rho}\right) + w\,\frac{\partial w}{\partial N} - u\,\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial H}{\partial N}.$$

Pošto se zameni u sa ωr i povede računa o (2.1′) i (2.3) dobija se ista jednačina kao što je (2.6), čime je dokazano da ona opisuje i strujanje stišljivog fluida.

Zamenjujući $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N}$ iz (2.6) u (1.31) postiže se

$$(2.7) \qquad w\,\frac{\partial w}{\partial N} = w^2\left(\frac{\sin^2\beta}{R_k} - \frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta\right) - 2w\omega\cos\beta\,\cos\delta - F_N + \frac{\partial H}{\partial N}.$$

Kao i u prethodnom odeljku i ovde se pretpostavlja da je $F_N = 0$, pa se jednačina (2.7) uprošćuje na

$$(2.8) \qquad w\,\frac{\partial w}{\partial N} + w^2\left(\frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\beta}{R_k}\right) + 2w\omega\cos\beta\,\cos\delta - \frac{\partial H}{\partial N} = 0.$$

Ako se ne zna samo relativna brzina w, a sve ostale veličine predstavljaju poznate funkcije - što je realno da se pretpostavi - onda se rešenje često može lako da nadje. Tako se naprimer, jednačina (2.8) može primeniti na strujanje kroz nepomične kružne rešetke, u kom slučaju je $\omega = 0$, $\beta = \alpha$ a relativna brzina w prelazi u apsolutnu brzinu $\underline{c}$, zbog čega se jednačina (2.8) uprošćuje i glasi

$$(2.9) \qquad c\,\frac{\partial c}{\partial N} + c^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\alpha}{R_k}\right) - \frac{\partial H}{\partial N} = 0.$$

Integraljenjem ove jednačine, od nula do $\underline{N}$, dobija se

$$(2.9') \qquad c = e^{\int_0^N \left(\frac{\sin^2\alpha}{R_k} - \frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta\right) dN} \left[c_i^2 + 2\int_0^N \frac{\partial H}{\partial N}\, e^{2\int_0^N \left(\frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\alpha}{R_k}\right) dN} dN\right]^{1/2},$$

gde je $\underline{c_i}$ (integralska konstanta) apsolutna brzina uz glavčinu ($\underline{N}$ = 0). Ova jednačina se može iskoristiti za proračunavanje strujanja stišljivog ili nestišljivog fluida ne samo kroz nepokretne kanale turbomašina, nego uopšte kroz nepokretne osnosimetrične prostore.

Jednačina (2.8) može se iskoristiti za proračunavanje strujanja kroz kolo turbomašine. Medjutim, ako je $\underline{\frac{\partial H}{\partial N}} = 0$, ona se uprošćava i glasi

$$(2.10) \qquad \frac{\partial w}{\partial N} + w\left(\frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\beta}{R_k}\right) + 2\omega\cos\beta\cos\delta = 0.$$

Kao i u prethodnom slučaju, može se pretpostaviti da je nepoznata samo brzina $\underline{w}$, te se nalazi da je

$$(2.11) \qquad w = e^{\int_0^N \left(\frac{\sin^2\beta}{R_k} - \frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta\right) dN} \left(w_i - \right.$$

$$- 2\omega \int_0^N \cos\beta \quad \cos\delta \quad e^{\int_0^N (\frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\beta}{R_k})\, dN} dN).$$

Ovde je sa $\underline{w_i}$ (integralska konstanta) označena relativna brzina uz glavčinu i dobija se iz jednačine kada se stavi $\underline{N} = 0$. Jednačina (2.11) iskoristiće se za analizu strujanja u slučaju kad se $\underline{H}$ ne menja duž normale meridijanskih strujnica. Prema načinu izvodjenja lako se zaključuje da poslednja jednačina važi i za stišljiv i za nestišljiv fluid.

U opštem slučaju, kada je $\underline{\omega} \neq 0$ i $\underline{\frac{\partial H}{\partial N}} \neq 0$, polazi se od jednačine (2.8), koja, kao i njena rešenja (2.9') i (2.11), važi za strujanje i stišljivog i nestišljivog fluida.

3. STRUJANJE NESTIŠLJIVOG FLUIDA KROZ TURBOMAŠINE

3.1. DIREKTNI PROBLEM

Ako je energija struje na ulasku u strujni kanal ista na svim strujnicama, onda je $\underline{H}$ = const., i jednačina (2.11) daje relativnu brzinu strujanja

$$w = e^{\int_0^N \left(\frac{\sin^2\beta}{R_k} - \frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta\right)dN} \Big(w_1 - 2\omega\int_0^N \cos\beta\,\cos\delta\, e^{\int_0^N \left(\frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\beta}{R_k}\right)dN} dN\Big). \tag{3.1}$$

Izraz za sračunavanje brzine $\underline{w}$ numerički se lako rešava iteraciskim postupkom. Kada se jedanput pretpostavi oblik strujnih linija sve veličine u izrazu (3.1) postaju poznate.

Brzina $\underline{w_1}$ (integracijska konstanta) se odredjuje iz jednačine kontinuiteta koja za nestišljiv fluid prima oblik

$$\dot{V} = 2\pi\int_0^{N_a} wr\sin\beta\, dN, \tag{3.2}$$

gde je sa $\underline{\dot{V}}$ označen zapreminski protok kroz turbomašinu a sa $\underline{N_a}$ rastojanje kućice od glavčine. Kada se brzina $\underline{w}$ iz (3.1) zameni u (3.2) dobija se veza izmedju protoka i brzine $\underline{w_1}$, $\underline{\dot{V}} = \underline{f(w_1)}$, iz koje se za dato $\underline{\dot{V}}$ nalazi $\underline{w_1}$.

Kada se zna $\underline{w_1}$, jednačina (3.1) daje relativnu brzinu $\underline{w}$ u svakoj tački normale na meridijanske strujnice. Izmedju dve susedne strujnice treba da prolazi jednaka količina fluida, što se proverava jednačinom kontinuiteta

$$\Delta\dot{V} = 2r\pi\, w \sin\beta \;\; \Delta N = 2r_o\pi w_o \sin\beta_o \;\Delta N_o, \tag{3.3}$$

označujući sa ΔN i ΔN_o rastojanje izmedju obližnjih strujnica na poznatom mestu "o" i onamo gde se odredjuju veličine stanja. Ukoliko jednačina (3.3) nije zadovoljena mora se popraviti položaj strujnica i za novodobiveni raspored izvesti ponovni proračun.

Iz jednačine (1.42) nalazi se pritisak

$$p = \rho\left(H + \frac{r^2\omega^2 - w^2}{2}\right). \tag{3.4}$$

Jedinični rad struje dan je poznatim izrazom

$$h = \frac{\omega}{g}\,(rc_u - r_o c_{ou}), \tag{3.5}$$

s napomenom da je $c_u = w_u + r\omega = w\cos\beta + r\omega$ (v. sl. 1.2).

Brzina strujanja kroz nepokretne kanale sračunavaće se iz jednačine (2.9')

$$c = e^{\int_0^N\left(\frac{\sin^2\alpha}{R_k} - \frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta\right)dN}\left(c_i^2 + 2\int_0^N \frac{\partial H}{\partial N}\, e^{2\int_0^N\left(\frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\alpha}{R_k}\right)dN} dN\right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Konstanta c_i odredjuje se pomoću jednačine kontinuiteta

$$\dot{V} = 2\pi\int_0^{N_a} cr \sin\alpha\, dN, \tag{3.7}$$

pritisak prema (3.4), vodeći računa da je $\underline{\omega} = 0$ i $\underline{h} = 0$. Postupak oko rešavanja integrala ostaje isti kao i u slučaju da je $\underline{\omega} = 0$.

Ako je pri strujanju kroz pokretne kanale (kolo) $\frac{\partial H}{\partial N} \neq 0$, račun mora da počne od jednačine (2.8). Izrazi (3.2), (3.3), (3.4) i 3.5) ostaju neizmenjeni.

Jednačine za proračun strujanja kroz pokretne kanale važe podjednako za strujanja kroz turbine, i kroz pumpe, s jedinom razlikom što je za turbine $\underline{h} < 0$ (smanjuje se energija fluida) a za pumpe je $\underline{h} > 0$ (povećava se energija fluida).

3.2. INVERZNI PROBLEM

Kružna projekcija apsolutne brzine dobija se neposredno iz jednačine (3.5) kao

$$c_u = \frac{gh + \omega r_o c_{ou}}{\omega r} \; ; \tag{3.8}$$

a meridijanska projekcija apsolutne brzine iz

$$c_m = e^{\int_0^N \frac{dN}{R_k}} \sqrt{c_{mi}^2 - 2\int_0^N \left[\left(\frac{c_u}{r} - \omega\right) \frac{\partial (r c_u)}{\partial N} - \frac{\partial H}{\partial N} \right] e^{-2\int_0^N \frac{dN}{R_k}} \, dN} . \tag{3.9}$$

Brzina $\underline{c_{mi}}$ predstavlja integralsku konstantu koja se odredjuje pomoću jednačine kontinuiteta

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^{Na} c_m r \, dN . \tag{3.10}$$

Pritisak je odredjen jednačinom

$$p = \rho\left(H + gh - \frac{c^2}{r}\right); \tag{3.11}$$

a prema slici 1.3 sleduje da je

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\omega r - c_u}{c_m}. \tag{3.12}$$

Do rešenja se dolazi istim postupkom kao i u prethodnom slučaju.

Ako je posredi strujanje kroz nepokretne kanale treba u svim izrazima samo staviti $\underline{\omega} = 0$ a tada je i $\underline{w} = \underline{c}$.

4. IZENTROPISKO STRUJANJE SAVRŠENOG STIŠLJIVOG FLUIDA KROZ TURBOMAŠINE

4.1. DIREKTNI PROBLEM

U odeljku 3.1 razmatrano je strujanje nestišljivog fluida, a sada se analizira strujanje savršenog stišljivog fluida.

Brzine relativnog strujanja, kroz pokretne kanale (kolo), odredjuje jednačina (2.11) ako je $\underline{H}$ = const.

$$(4.1)\qquad w = e^{\int_0^N \left(\frac{\sin^2\beta}{R_k} - \frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta\right)dN} \Big(w_1 - 2\omega\int_0^N \cos\beta\,\cos\delta\; e^{\int_0^N \left(\frac{\cos^2\beta}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\beta}{R_k}\right)dN}\, dN\Big).$$

Brzine strujanja kroz nepokretne kanale sračunaće se iz jednačine (2.9′) kao

$$(4.2)\qquad c = e^{\int_0^N \left(\frac{\sin^2\alpha}{R_k} - \frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta\right)dN} \left[c_1^2 + 2\int_0^N \frac{\partial H}{\partial N}\, e^{2\int_0^N \left(\frac{\cos^2\alpha}{r}\cos\delta - \frac{\sin^2\alpha}{R_k}\right)dN}\, dN\right]^{1/2}.$$

Izentropiske promene stanja idealnog gasa opisuju jednačine

$$(4.3)\qquad \frac{p_o}{\rho_o^{\varkappa}} = \frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \text{const.},$$

$$\frac{p}{\varrho} = gRT. \tag{4.4}$$

Vodeći računa o (4.3) sračunaće se pomoću jednačine (1.43) gustina,

$$\varrho = \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{\varrho_o^{\varkappa}}{p_o}\,(H + \frac{\omega^2 r^2 - w^2}{2})\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}. \tag{4.5}$$

Integralska konstanta $\underline{w_i}$ u jednačini (4.1) ili $\underline{c_i}$ u jednačini (4.2) odredjuje se iz jednačine kontinuiteta

$$\dot{G} = 2\pi g \int_0^{N_a} \varrho w \sin\beta \; r\, dN = 2\pi g \int_0^{N_a} \varrho c \sin\alpha r \, dN. \tag{4.6}$$

Zatim se prema jednačinama

$$\Delta\dot{G} = 2\pi g \varrho r w \sin\beta \Delta N = 2\pi g \varrho_o r_o w_o \sin\beta_o \Delta N_o = \tag{4.7}$$

$$= 2\pi g \varrho r c \sin\alpha \Delta N = 2\pi g \varrho_o r_o c_o \sin\alpha_o \Delta N_o,$$

koriguje pretpostavljeni oblik strujnica. Postupak za rešavanje ovih jednačina je sličan kao i za slučaj strujanja nestišljivog fluida. Prvo se pretpostavi oblik strujnica, sračunaju se potrebni elementi i pretpostavka koriguje dok se ne postigne željena tačnost.

4.2. INVERZNI PROBLEM

Obimsku projekciju apsolutne brzine fluida daje jednačina

$$c_u = \frac{gh + \omega r_o c_{ou}}{\omega r}; \tag{4.8}$$

a meridijanska projekcija jednaka je

$$(4.9)\qquad c_m = e^{\int_0^N \frac{dN}{R_k}} \sqrt{c_{mi}^2 - 2\int_0^N \left[\left(\frac{c_u}{r} - \omega\right)\frac{\partial(rc_u)}{\partial N} - \frac{\partial H}{\partial N}\right] e^{-2\int_0^N \frac{dN}{R_k}}\, dN}.$$

Gustina u nekoj tački odredjena je izrazom

$$(4.10)\qquad \rho = \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{\rho_0^{\varkappa}}{p_0}\left(H + gh - \frac{c^2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

Pomoću jednačine (4.6) sračunaće se integralska konstanta c_{mi} a prema (4.7) se koriguje pretpostavljena mreža strujnica, vodeći računa da je $c_m = c \sin\alpha = w_m = w \sin\beta$.

Ugao struje dan je kao i ranije jednačinom (v. sl. 1.3)

$$(4.11)\qquad \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\omega r - c_u}{c_m}.$$

Tok proračuna teče na isti način kao i za slučaj strujanja nestišljivog fluida.

5. SPECIJALNI SLUČAJEVI

5.1. VIHORNO STRUJANJE

Pri osnosimetričnom vihornom strujanju proizvod rc_u = $f(T)$ ne menja se duž normala meridijanskih projekcija strujnica, pa je

$$h = \frac{1}{g}\left(\omega r c_u - \omega r_o c_{ou}\right) = h(T). \tag{5.1}$$

Ako se energija menja samo duž strujnica onda je pored $\frac{\partial(rc_u)}{\partial N} = 0$ i $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$, pa jednačina (2.5) prelazi u

$$c_m = c_{mi}\, e^{\int_0^N \frac{dN}{R_k}}. \tag{5.2}$$

Ova jednačina važi za vihorno strujanje kako stišljivog tako i nestišljivog fluida. Iz (5.2) se vidi da meridijanska brzina može biti konstantna po normali meridijanskih strujnica samo kada su meridijanske strujnice prave linije. Nikakve pretpostavke nisu učinjene o uglu nagiba meridijanskih strujnica prema z osi, te može biti proizvoljan.

Poslednja jednačina je poznata za nestišljiv fluid. M. Strscheletzky je izvodi u svom radu /9/. Detaljno razradjena za nestišljiv fluid ova jednačina može se naći u knjigama C. Pfleiderer-a /11/ i /12/.

5.2 STRUJANJE KROZ KOLO CILINDARSKIH LOPATICA

Cilindarske lopatice imaju isti ugao $\underline{\beta}$ duž normale meridijanskih projekcija strujnica. Zato jednačina (2.11) za osnosimetrično strujanje nestišljivog i stišljivog fluida prelazi u

$$(5.3)\qquad w = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\cos^2\beta} e^{\sin^2\beta \int_0^N \frac{dN}{R_k}} \Big(w_1 -$$

$$- 2\omega \cos\beta \int_0^N \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\cos^2\beta} e^{-\sin^2\beta \int_0^N \frac{dN}{R_k}} \cos\delta \, dN\Big),$$

gde je sada ponovo iskorišćena veza (2.3), $\underline{dr} = \underline{dN}\ \underline{\cos\delta}$. Za strujanje kroz nepokretne kanale treba staviti $\underline{\omega} = 0$ i $\underline{w} = \underline{c}$.

5.3. STRUJANJE VEOMA VELIKIH POLUPREČNIKA KRIVINE

Ako je $\underline{R_k} \approx \infty$ onda jednačina (2.11) za strujanje nestišljivog i stišljivog fluida, vodeći računa o (2.3), prelazi u

$$(5.4)\qquad w = e^{-\int_{r_i}^{r} \frac{\cos^2\beta}{r} dr} \left(w_1 - 2\omega \int_{r_i}^{r} \cos\beta\, e^{\int_{r_i}^{r} \frac{\cos^2\beta}{r} dr} dr\right),$$

Ugao δ pritom može imati proizvoljnu vrednost.

Za strujanje kroz nepokretne kanale, $\omega = 0$, dobija se izraz

$$(5.5) \qquad c = c_i \, e^{-\int_{r_i}^{r} \frac{\cos^2\beta}{r} dr} ,$$

koji omogućuje da se odrede brzine duž normale meridijanskih strujnica. Kada su meridijanske strujnice paralelne osi z to je položaj kakav zauzimaju strujnice pri proticanju stišljivog ili nestišljivog fluida kroz prave cevi.

5.4. PRAVOLINIJSKO STRUJANJE SA β = const.

Kada je β = const. i $R_k \approx \infty$ prelazi (5.4) u

$$(5.6) \qquad w = \left(\frac{r_i}{r}\right)^{\cos^2\beta} \left\{ w_i - 2\omega r_i \frac{\cos^2\beta}{1 + \cos^2\beta} \left[\left(\frac{r}{r_i}\right)^{1 + \cos^2\beta} - 1 \right] \right\} .$$

Sa $\omega = 0$, postaje

$$(5.7) \qquad c = c_i \left(\frac{r_i}{r}\right)^{\cos^2\alpha} ,$$

što je zakon za promenu apsolutne brzine kad fluid struji kroz nepokretne kanale. Ova jednačina sadrži u sebi i slučaj kada su meridijanske projekcije strujnica paralelne osi z a to je slika strujanja fluida kroz prave cevi.

Za slučaj strujanja nestišljivog fluida jednačinu (5.7), na drugi način rasmatra W. Traupel u knjizi /13/.

6. EKSPERIMENTALNA PROVERA IZVEDENIH JEDNAČINA

6.1. EKSPERIMENTALNA PROVERA JEDNAČINE (3.6)

Za ispitivanje strujanja koje odredjuje jednačina (3.6) napravljeno je opitno postrojenje i izvršeno je nekoliko serija eksperimenara[1]. Instalacija se sastojala od valjčastog strujnog prostora sa glavčinom postavljenom u osi, što je učinjeno da bi se izbeglo stvaranje vrtložnog jezgra. Venac lopatica "a" nalazio se na ulasku u cev (Sl. 6.1). Strujanje vazduha stvarao je dobošasti ventilator "c". Protok je regulisan na izlaznoj strani tanjirom "d", a radi kontrole je meren pomoću priključaka 4.

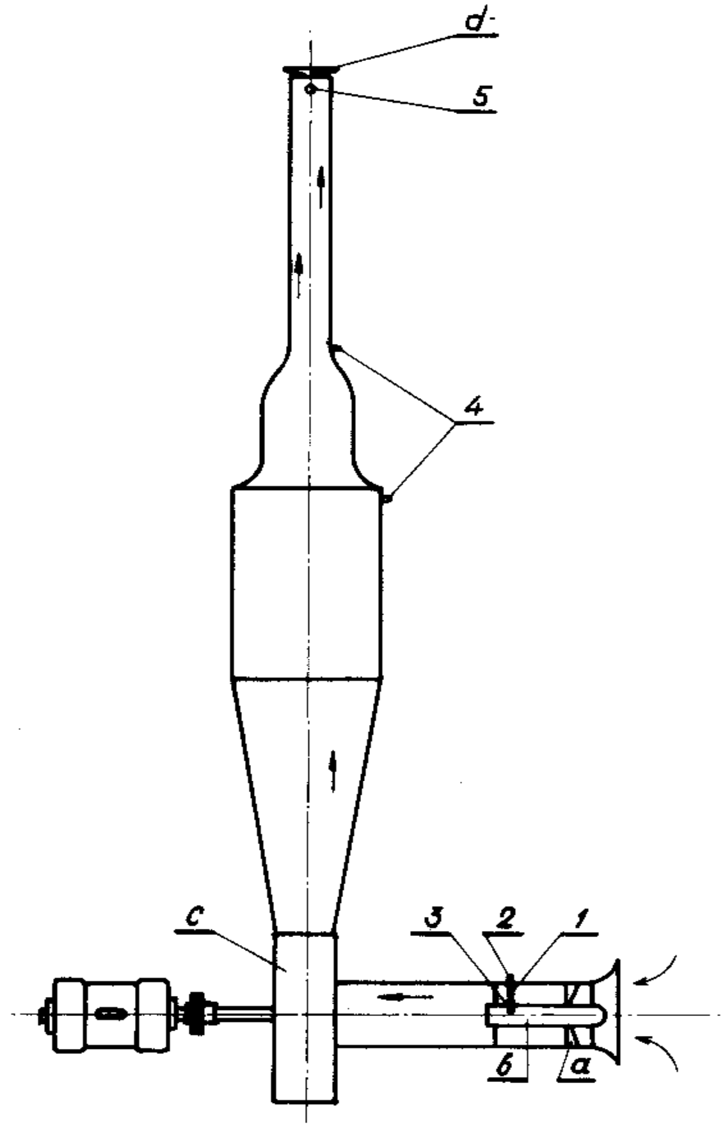
Pritisak, brzina i ugao struje prema aksijalnom pravcu mereni su cilindarnom sondom s jednom rupom. Nulti ugao sonde i ugao zaokretanja od nultog pravca radi merenja statičkog pritiska baždareni su u struji vazduha u slobodnoj atmosferi.

Merenje strujnih veličina izvršeno je kroz otvore 1 koji su izbušeni po luku na dužini od jednog ipo koraka lopatica. Merenjem brzine i pritiska postavljanjem sonde u razne otvore pokazalo se da nema uočljive razlike izmerenih veličina. S toga razloga se zaključuje da su uslovi osne simetrije u dovoljnoj meri zadovoljeni.

Kontrola sondom izmerenog statičkog pritiska vršena je merenjem statičkog pritiska na priključcima 2 i 3 koji su posta-

---

1. Opitno postrojenje i svi eksperimenti izvršeni su u Zavodu za hidraulične mašine Mašinskog fakulteta u Beogradu u toku školske 1961/62 godine



Sl. 6.1. Skica postrojenja

1. Otvori za sondu;
2. Priključak za merenje pritiska uz kućicu;
3. Priključak za merenje pritiska uz glavčinu;
4. Priključci za merenje protoka;
5. Otvor za merenje temperature;

a. Venac lopatica;
b. Glavčina (nepokretna);
c. Ventilator;
d. Tanjir za regulisanje protoka.

vljeni na glavčini i oklopu u istoj poprečnoj ravni sa otvorima za sondu.

Niz od 20 limenih lopatica "a" zaokretao je struju vazduha za oko 30° mereno prema osnom pravcu. Ovaj ugao je takodje meren sondom istovremeno kada su mereni i pritisci.

Ispitivana jednačina (3.6) dovešće se na pogodniji oblik za numeričko sračunavanje. Pošto je usvojen valjčasti strujni prostor, to je krivina meridijanskih projekcija strujnica $K = 1/R_k \approx 0$ a pored toga su približno paralelne sa osom strujnog prostora ($\delta \approx 0$, $dN \approx dr$). Stoga razloga jednačina (3.6) prelazi u

$$(6.1) \qquad c = e^{-\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} \left(c_s^2 + 2 \int_{r_s}^{r} \frac{\partial H}{\partial r} e^{2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} dr\right)^{1/2},$$

gde je sa c_s označena brzina na poluprečniku $r = r_s$ i predstavlja integralsku konstantu. Poluprečnik r_s može se proizvoljno birati. Da bi se izbeglo sračunavanje promene totalne energije duž poluprečnika parcijalno će se integraliti integral u maloj zagradi; tako je

$$(6.2) \qquad \int_{r_s}^{r} \frac{\partial H}{\partial r} e^{2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} dr = H(r)\, e^{2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} - H(r_s) - 2 \int_{r_s}^{r} H(r) \frac{\cos^2\alpha}{r} e^{2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} dr,$$

pa jednačina (6.1) dobija oblik

$$(6.3) \qquad c = \left[e^{-2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} \left(c_s^2 - 2H(r_s) + 2H(r)\, e^{2\int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} - \right.\right.$$

$$- 4 \int_{r_s}^{r} H(r) \frac{\cos^2\alpha}{r} e^{2 \int_{r_s}^{r} \frac{\cos^2\alpha}{r} dr} dr) \Big]^{1/2}$$

Pri sračunavanju brzine po ovoj jednačini za $\underline{H}$ će se uzimati izmerena totalna energija kao i izmerena vrednost ugla $\underline{\alpha}$. Ukupna energija je sračunavana prema jednačini

$$(6.4) \qquad H = \frac{g p_t'}{\gamma},$$

gde je sa $\underline{p_t'}$ obeležen totalni apsolutni pritisak.

Na slikama 6.2 i 6.3 unesene su izmerene vrednosti totalnog pritiska, statičkog pritiska, brzine i ugla $\underline{\alpha}$. Na istim slikama su prikazane i vrednosti sračunate prema jednačini (6.3). Iz dijagrama se vidi da se najveća razlika izmerenih i prema jednačini (6.3) sračunatih brzina

$$\frac{33 - 32}{32} 100 = 3{,}12\% \quad \text{(prema slici 6.2)},$$

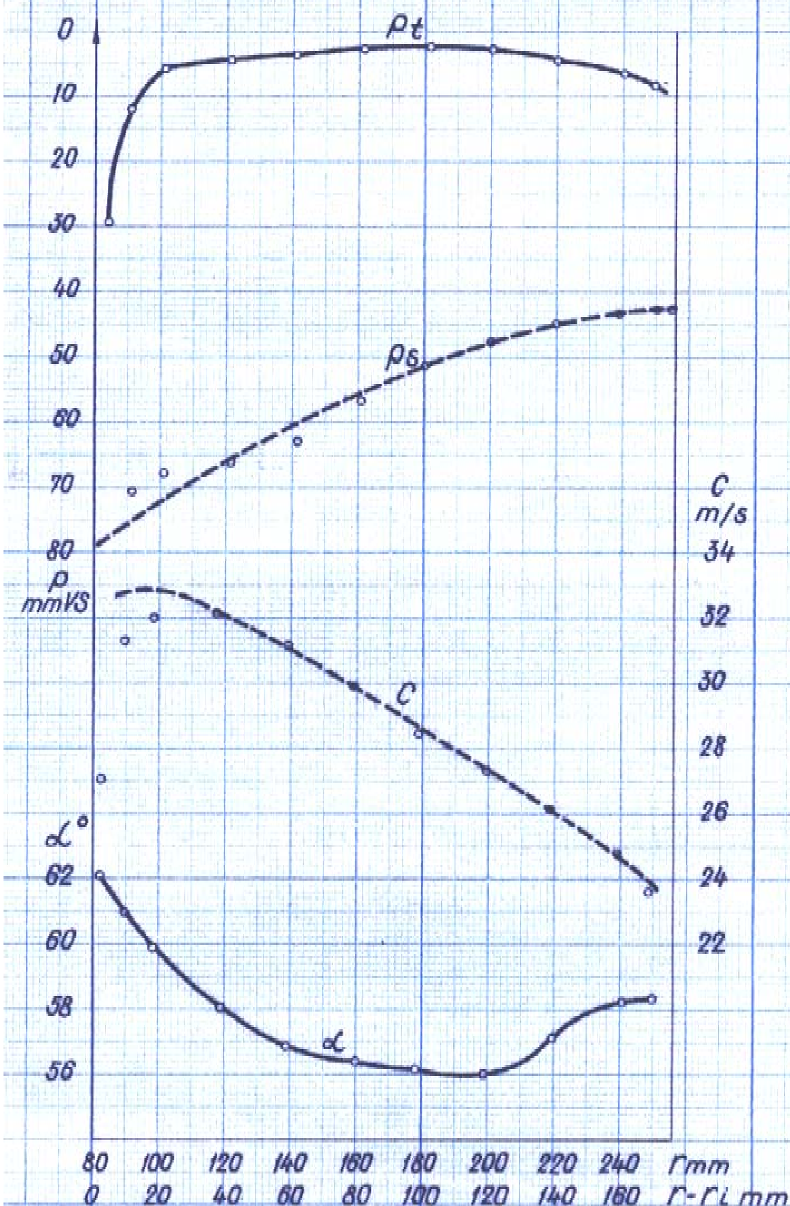
$$\frac{32{,}6 - 30{,}6}{30{,}6} 100 = 6{,}54\% \quad \text{(prema slici 6.3)},$$

javlja u blizini glavčine na poluprečniku $\underline{r} \approx 98$ mm.

Na kraju je sračunat protok polazeći od teorijski nadjenih brzina i uporedjen je sa direktno izmerenim protokom. Tako je za slučaj strujanja prikazanog dijagramom na slici 6.2 sračunat protok 3,99 m^3/s a izmeren je 4,14 m^3/s; relativno otstupanje je

$$\frac{4{,}14 - 3{,}99}{3{,}99} 100 = 3{,}62\%.$$

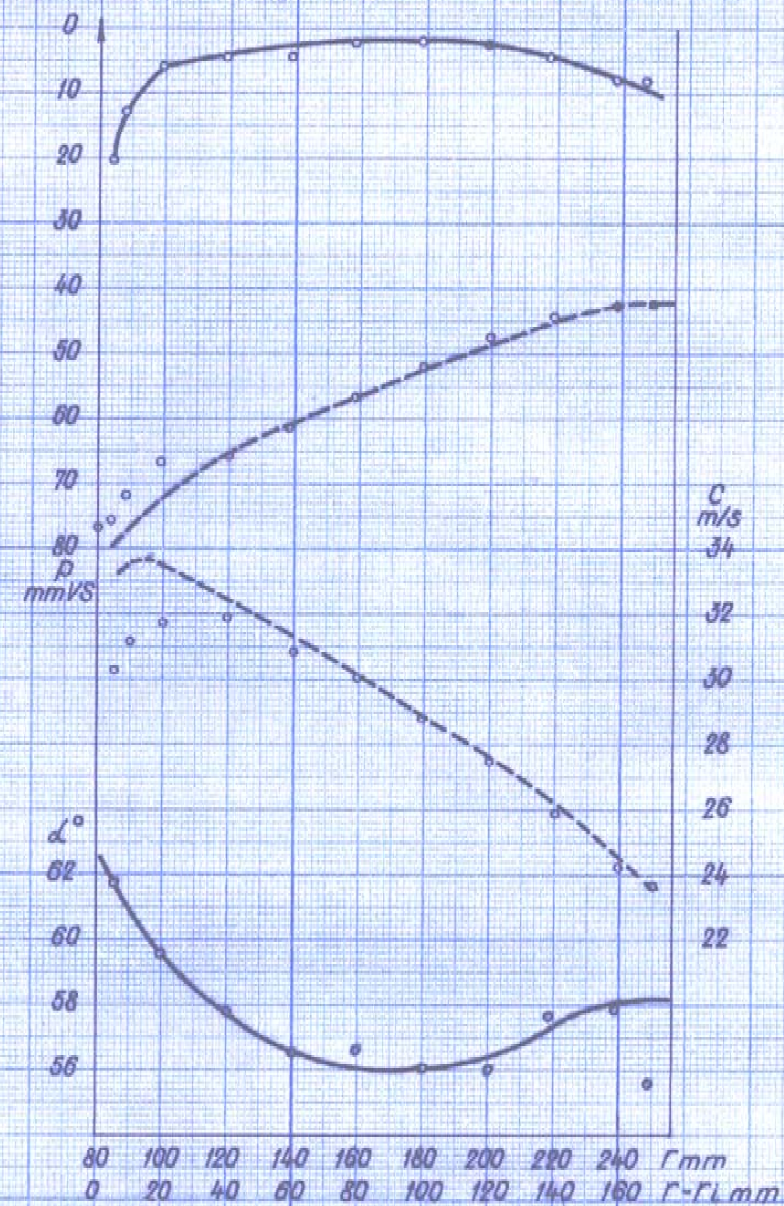
Za strujanje prikazano na slici 6.3 otstupanje je



Sl. 6.2. Strujanje u valjčastom prostoru iza venca nepokretnih lopatica

$\underline{p_t}$ totalni pritisak; $\underline{p_s}$ statički pritisak; $\underline{c}$ brzina;
$\underline{\alpha}$ ugao struje prema kružnom pravcu;
o—o izmereno; ----- teorijski sračunato.

Napomena: pritisak je meren u odnosu na atmosferski, te je na ordinati nanošen podpritisak.



Sl. 6.3. Strujanje u valjčastom prostoru iza venca nepokretnih lopatica

p_t totalni pritisak; p_s statički pritisak; c brzina;

α ugao struje prema kružnom pravcu;

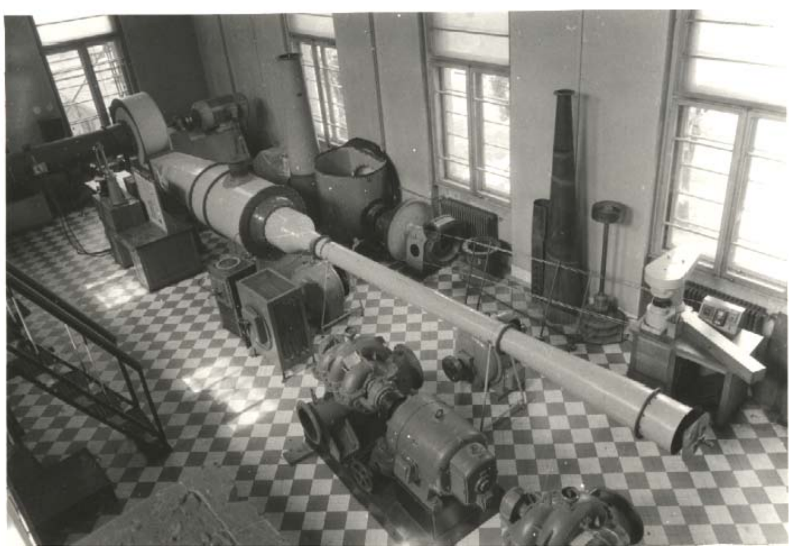
o—o—izmereno; ------teorijski sračunato.

Napomena: pritisak je meren u odnosu na atmosferski, te je na ordinati nanošen podpritisak.

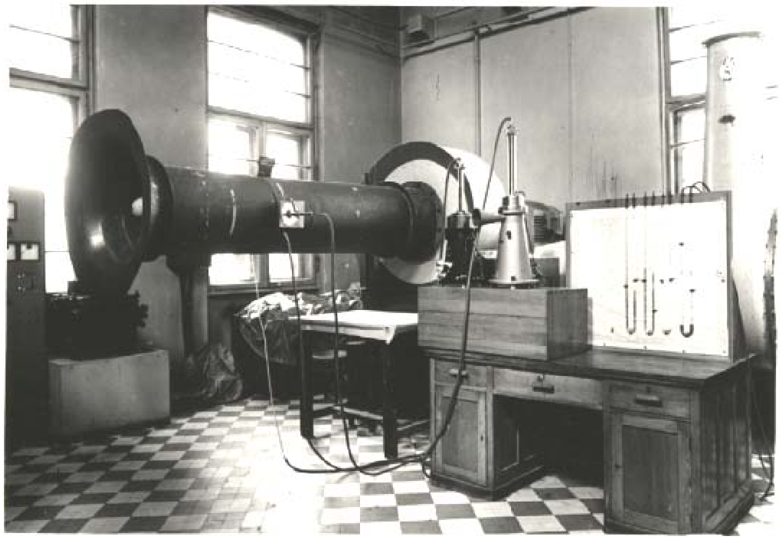
$$\frac{4{,}02 - 4{,}01}{4{,}02} 100 = 0{,}25\%$$

Uporedjenje eksperimentalnih i teorijski dobijenih rezultata je u potpunosti zadovoljavajuće.

Slika 6.4 prikazuje dispoziciju opitnog postrojenja a na fotografiji 6.5 se vidi valjčasti strujni prostor i instrumenti sa kojima je vršeno merenje.



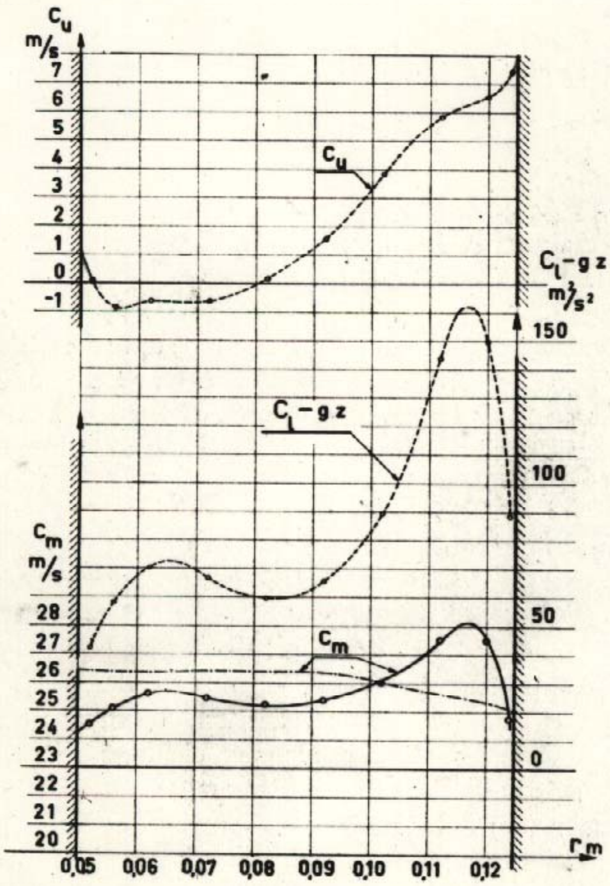
Sl. 6.4 Dispozicija opitnog postrojenja



Sl. 6.5. Valjčasti strujni prostor i instrumenti za merenje

6.2. EKSPERIMENTALNA PROVERA JEDNAČINE (3.9)

Jednačinu (3.9) za slučaj strujanja nestišljivog fluida kroz nepokretne strujne prostore ($\underline{\omega} = 0$) izveo je i eksperimentalno potvrdio M. Strscheletzky u radu /9/. Ovde se radi upoređjenja, navodi dijagram iz toga članka (v. sl. 6.6) koji predstavlja strujanje iza kola jedne Kaplanove turbine. Oznake na fotografiji razlikuju se u toliko što je totalna energija $\underline{H}$ obeležena sa $\underline{C_1}$ odnosno $\underline{C_1} - \underline{gz}$.



Figur 2

Strömung hinter dem Laufrad einer Kaplan-Turbine.

- - -o- - - - vorgegebene bzw. gemessene Verteilungen des Energieinhaltes ($C_l - g\,z$) und der Umfangskomponente (c_u);

——— c_m-Verteilung nach der Formel (13);

—o— gemessene Werte der c_m-Komponente;

– · – · – c_m-Verteilung für C_l = const bzw. $C_l - g\,z$ = const nach der Formel (13).

Sl. 6.6 Strujanje iza kola jedne Kaplanove turbine

---o--- data tj. izmerena energija $\underline{H} = \underline{C_l} - \underline{gz}$ i obimna brzina $\underline{c_u}$;

——— brzina $\underline{c_m}$ sračunata prema jednačini (3.9) za $\omega = 0$;

—o— izmerena vrednost brzine $\underline{c_m}$;

·—·—— brzina $\underline{c_m}$ za $\underline{H} = \underline{C_l}$ = const. i $\underline{\omega} = 0$ prema (3.9).

I. D O D A T A K

I. 1. DOPUNSKA ANALIZA JEDNAČINE (2.2)

U odeljku 2.1 je napomenuto da jednačina (2.2) važi ako je posmatrani fluid barotropan ($\rho = \rho(p)$). Sada će se to dokazati.

Jednačina (2.2) je dobijena iz jednačina (1.39) i (1.17) za slučaj strujanja nestišljivog fluida i iz jednačina (1.40) i (1.17) ako se posmatra strujanje stišljivog barotropnog fluida. Jednačina energije iz koje sleduju jednačine (1.39) i (1.40) može se, u opštem slučaju, napisati u obliku

$$\int\frac{dp}{\rho} + \frac{c^2}{2} - \omega r c_u = H = H(N). \tag{I.1}$$

Ako se uvede oznaka

$$F(p) = \int\frac{dp}{\rho} = \int\frac{dp}{\rho(p)}, \tag{I.2}$$

(što se može učiniti samo ako je fluid barotropan) jednačina (I.1) prelazi u

$$F(p) + \frac{c^2}{2} - \omega r c_u = H(N). \tag{I.3}$$

Jednačina (1.17),

$$\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{R}\cos\delta = F_N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N}, \tag{1.17}$$

vodeći računa o (I.2) dobija oblik

$$\frac{\partial F(p)}{\partial N} + \frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - F_N = 0. \tag{I.4}$$

Diferenciranjem po T jednačine (I.3) sleduje

$$\frac{\partial F(p)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right) = 0; \tag{I.5}$$

ponovnim diferenciranjem po N dobija se

$$\frac{\partial^2 F(p)}{\partial N \partial T} + \frac{\partial^2}{\partial N \partial T}\left(\frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right) = 0. \tag{I.6}$$

Diferenciranjem po T jednačine (I.4) nalazi se

$$\frac{\partial^2 F(p)}{\partial T \partial N} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - F_N\right) = 0. \tag{I.7}$$

Pošto je $\underline{\frac{\partial^2 F(p)}{\partial N \partial T}} = \underline{\frac{\partial^2 F(p)}{\partial T \partial N}}$ to, iz (I.6) i (I.7), sleduje

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - F_N - \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right)\right] = 0, \tag{I.8}$$

koja integraljenjem prelazi u

$$\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - F_N - \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right) = K = K(N), \tag{I.9}$$

gde je K = const. duž meridijanske strujnice, a menja se po normali N.

Radi odredjivanja veze izmedju veličina $K(N)$ i $H(N)$, treba od jednačine (I.4) oduzeti jednačinu (I.9), s rezultatom

$$\frac{\partial}{\partial N}\left[F(p) + \frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right] = - K(N). \tag{I.10}$$

Diferenciranjem po $\underline{N}$ jednačine (I.3) sleduje

$$\frac{\partial}{\partial N}\left[F(p) + \frac{c^2}{2} - \omega r c_u\right] = \frac{\partial H}{\partial N}. \tag{I.11}$$

Uporedjivanjem izraza (I.10) i (I.11) dobija se

$$K(N) = - \frac{\partial H}{\partial N}. \tag{I.12}$$

Zamenom nadjene vrednosti za $\underline{K}(\underline{N})$ u jednačinu (I.9), i vodeći računa da je $\underline{c^2} = \underline{c_m^2} + \underline{c_u^2}$, dobija se

$$c_m\frac{\partial c_m}{\partial N} - \frac{c_m^2}{R_k} + c_u\frac{\partial c_u}{\partial N} + \frac{c_u^2}{r}\cos\delta - \omega\frac{\partial}{\partial N}(rc_u) + F_N - \frac{\partial H}{\partial N} = 0, \tag{I.13}$$

a to je jednačina (2.2), čime je pokazano da ona važi za slučaj strujanja barotropnog fluida.

L I T E R A T U R A

1. C.O Holmquist and W.D. Rannie, An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Axial Turbomachines, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, Jun 1956, Nr. 6

2. M. Strscheletzky, Gleichgewichtsformen der rotationssymmetrischen Stromungen mit konstantem Drall in geraden, zilindrischen Rotationshohlraumen, Voith Forschung und Konstruktion, H.5, Oktober 1959

3. N.M. Obradović, Aksijalni kompresori, Beograd 1959

4. K. Voronjec, Dinamika gasova, Beograd 1961

5. S. Pejović, Približni proračun prostornog strujanja stišljivog fluida kroz turbomašine, Zbornik Mašinskog fakulteta, Beograd 1959-60

6. G.F. Proskura, Gidrodinamika turbomašin, Mašgiz 1954

7. B. Ekert, Osevie i centrobežnie kompressori, Mašgiz 1959

8. L.G. Lojcjanski, Mehanika židkosti i gaza, Moskva 1959

9. M. Strscheletzky, Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drallstromungen inkompressibler Flussigkeiten, ZAMP, Vol. IX b, 1958, strana 648-660

10. M. Strscheletzky, Stromung im Ubergangsraum der Wasserturbinen, Ing. - Arch. 19, 309-320, 1951; 21, 408, 1953

11. C. Pfleiderer, Stromungsmaschinen, Berlin 1957

12. K. Pflejderer, Lopatičnie mašini dlja židkostej i gazov, Moskva 1960

13. W. Traupel, Thermische Turbomaschinen, Berlin 1958

14. N.M. Obradović, Osnove turbomašina, Beograd 1962

15. Ja.A. Sirotkin, Rasčet osesimetričnogo vihrevogo potoka nevjazkoj sžimaemoj židkosti v osevih turbomašinah, Izvestija akademii nauk SSSR, Mehanika i mašinostroenije, No. 2, 1961 strana 78-88

16. Ja.A. Sirotkin, Čislennij metod rasčeta vihrevogo potoka idealjnoj nesžimaemoj židkosti v osesimetričnih kanalah, Izvestija akademii nauk SSSR, Mehanika i mašinostroenije No. 5, 1961, str. 44-51

17. T.P. Andjelić, Teorija vektora, Beograd 1959

18. T. Karlsson, On the Influence of Radial Components of Blade Forces in Axial Turbomachines, M.E. Thesis, California Institute of Technology, 1953

19. N.E. Kočin, I.A. Kibel, N.V. Roze, Teoretičeskaja gidromehanika, Moskva 1955

Eksperimentalni deo teze

Skoči na ulazni fajl

Skoči na Curriculium Vitae