

**Verfahren zur Berechnung einer räumlichen,
nicht-rotationssymmetrischen Strömung in Turbomaschinen**

Von Dr.-Ing. S. Pejović, Belgrad, und Dipl.-Ing. H.-A. Lenck, Braunschweig

In einer früheren Arbeit (Konstruktion 19 (1967) Heft 9, S. 358/360) wurde die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung für den Fall abgeleitet, daß die Strömungsrichtung bekannt ist. Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, daß ein aus der Eulerschen Gleichung und der Energiegleichung abgeleitetes allgemeines Näherungsverfahren zur Berechnung der Strömungsverteilung auch bei räumlich nicht-rotationssymmetrischer Strömung Gültigkeit hat. Dieses Verfahren wurde durch Messungen im Spalt zwischen Lauf- und Leitrad eines einstufigen Axialgebläses mit gestörter Zuströmung überprüft. Die berechneten Geschwindigkeitsverteilungen über dem Radius an verschiedenen Stellen auf dem Umfang stimmen gut mit den gemessenen überein.

Strömungsgleichungen

Die allgemeine Bewegungsgleichung für reibungsfreie Strömung in vektorieller Schreibweise lautet

$$D\vec{c}/Dt = \vec{f} - 1/\varrho \cdot \nabla p, \quad (1)$$

wobei \vec{c} der Geschwindigkeitsvektor, ϱ die Dichte des strömenden Mittels, t die Zeit und \vec{f} eine Feldkraft bedeuten.

Für weitere Betrachtungen werden krummlinige orthogonale Koordinaten gewählt. Die Koordinatenrichtungen sind:

Meridianrichtung \vec{m}_0 in Richtung der Meridiangeschwindigkeit, definiert durch die Gleichung

$$\vec{m}_0 = \vec{z}_0 \cdot \cos \delta + \vec{r}_0 \cdot \sin \delta; \quad (2)$$

Normalrichtung \vec{n}_0 , Richtung normal zu den Stromlinien in der Meridianebene

$$\vec{n}_0 = -\vec{z}_0 \sin \delta + \vec{r}_0 \cos \delta; \quad (3)$$

Umfangsrichtung $\vec{\theta}_0$ mit der Koordinate Θ , wie im Zylinderkoordinatensystem.

Hierbei sind \vec{r}_0 und \vec{z}_0 die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten r und z , \vec{m}_0 der Einheitsvektor in Richtung der Meridiangeschwindigkeiten, \vec{n}_0 der Einheitsvektor in Normalrichtung, $\vec{\theta}_0$ der Einheitsvektor in Umfangsrichtung und δ der Winkel zwischen Axial- und Meridiangeschwindigkeiten.

Um Gl. (1) in dieses Koordinatensystem übertragen zu können, benötigt man weiterhin die Einheitsvektorableitungen der Zylinderkoordinaten

$$D\vec{r}_0/Dt = c_u/r \cdot \vec{\theta}_0, \quad (4)$$

$$D\vec{\theta}_0/Dt = -c_u/r \cdot \vec{r}_0. \quad (5)$$

Die Ableitung des Einheitsvektors in Meridianrichtung findet man aus Gl. (2)

$$D\vec{m}_0/Dt = D\delta/Dt \cdot \vec{n}_0 + c_u/r \cdot \sin \delta \cdot \vec{\theta}_0 \quad (6)$$

und die des Einheitsvektors in Normalrichtung aus Gl. (3)

$$D\vec{n}_0/Dt = -D\delta/Dt \cdot \vec{m}_0 + c_u/r \cdot \cos \delta \cdot \vec{\theta}_0. \quad (7)$$

Weiterhin ist $D\delta/Dt = D\delta/Dm \cdot Dm/Dt = c_m \cdot D\delta/Dm$. Da δ der Winkel zwischen der Axialrichtung und der Tangente der Meridianbahnkurven ist, die man durch Rotation des Bahnkurventeilchens in eine Meridianebene $\Theta = \text{const.}$ erhält, gibt der Ausdruck $Dm/D\delta$ den Krümmungsradius der Meridianbahnkurven an, denn es ist

$$D\delta/Dm = 1/R. \quad (8)$$

Damit ist

$$D\delta/Dt = c_m/R, \quad (9)$$

Die Arbeit entstand im Pfeleiderer-Institut für Strömungsmaschinen der TH Braunschweig. Dr.-Ing. S. Pejović ist Forschungsstipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung, Dipl.-Ing. H.-A. Lenck ist wiss. Assistent am Pfeleiderer-Institut.

und die Gln. (6) und (7) lauten

$$D\vec{m}_0/Dt = c_m/R \cdot \vec{n}_0 + c_u/r \cdot \sin \delta \cdot \vec{\theta}_0, \quad (10)$$

$$D\vec{n}_0/Dt = -c_m/R \cdot \vec{m}_0 + c_u/r \cdot \cos \delta \cdot \vec{\theta}_0. \quad (11)$$

Setzt man in die Gl. (1)

$$\vec{c} = c_m \cdot \vec{m}_0 + c_u \cdot \vec{\theta}_0, \quad (12)$$

wobei c_m die Meridian- und c_u die Umfangskomponente der örtlichen Geschwindigkeit c bezeichnen, so bekommt man mit Hilfe der Gln. (2) bis (11) die Bewegungsgleichungen im m, n, Θ -Koordinatensystem

$$Dc_m/Dt - c_u^2/r \cdot \sin \delta = f_m - 1/\varrho \cdot \partial p / \partial m, \quad (13)$$

$$c_m^2/R - c_u^2/r \cdot \cos \delta = f_n - 1/\varrho \cdot \partial p / \partial n, \quad (14)$$

$$Dc_u/Dt + (c_m \cdot c_u)/r \cdot \sin \delta = f_\Theta - 1/\varrho \cdot \partial p / (\partial \Theta) \quad (15)$$

mit f_m, f_n und f_Θ als Komponenten der Feldkraft \vec{f} in m, n - und Umfangsrichtung.

Die absolute Geschwindigkeit c entsteht durch vektorielle Addition der Relativgeschwindigkeit w und der Umfangsgeschwindigkeit $u = r\omega$, mit $\omega = \text{const.}$ als Winkelgeschwindigkeit des Laufrades:

$$\vec{c} = w + \omega r \cdot \vec{\theta}_0.$$

Entnimmt man hieraus die Komponenten

$$c_m = w_m \quad (16)$$

und

$$c_u = w_u + \omega r \quad (17)$$

und setzt diese in die Gln. (13) bis (15) ein, so ergibt sich im relativen Koordinatensystem, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω des Laufrades umläuft,

$$Dw_m/Dt - (w_u + \omega r)^2/r \cdot \sin \delta = f_m - 1/\varrho \cdot \partial p / \partial m \quad (18)$$

$$w_m^2/R - (w_u + \omega r)^2/r \cdot \cos \delta = f_n - 1/\varrho \cdot \partial p / \partial n, \quad (19)$$

$$D(w_u + \omega r)/Dt + w_m \cdot (w_u + \omega r)/r \cdot \sin \delta = f_\Theta - 1/\varrho \cdot \partial p / (r \cdot \partial \Theta). \quad (20)$$

Da für die Ableitungen der Gln. (13) bis (15) und (18) bis (20) keine anderen als nur die allgemeinen Voraussetzungen für Gl. (1) getroffen wurden, so gelten diese Gleichungen, genau wie Gl. (1), sowohl für die Betrachtung einer rotationssymmetrischen als auch für eine allgemeine Strömung.

Bisher wurden die Gln. (14) und (19) nur für den rotationssymmetrischen Fall angewendet; hier soll gezeigt werden, daß sie auch für dreidimensionale nicht-rotationssymmetrische Strömung verwendbar sind.

Für die weitere Untersuchung werden nur noch die Gln. (14) und (15) betrachtet, die ihre Form unter der Voraussetzung rotationssymmetrischer Strömung nicht verändern.

Die Energiegleichung für die Relativströmung lautet

$$f 1/\varrho \cdot dp + (w^2 + u^2)/2 = h, \quad (21)$$

wobei h eine für eine Stromlinie bei stationärer Strömung geltende Konstante ist, die sich mit n und Θ ändern kann. Aus den Gl. (19) und (21) ergibt sich

$$w \cdot \partial w / \partial n - w_m^2 / R + w_m^2 / r \cdot \cos \delta + 2 \omega w_m \cdot \cos \delta - \partial h / \partial n + f_n = 0. \quad (22)$$

Ist die Strömungsrichtung durch die Winkel β und δ bekannt, dann ist

$$w_m = w \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad w_u = w \cdot \cos \beta,$$

und Gl. (22) lautet

$$w \cdot \partial w / \partial n + w^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) + 2 \omega w \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta - \partial h / \partial n + f_n = 0. \quad (23)$$

Sind in dieser Gleichung außer der Geschwindigkeitsverteilung alle Größen bekannt, so läßt sich ein entsprechendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen aufstellen:

$$dq_m / \Theta = \epsilon_n \cdot dq_n / w = d\Theta / \Theta = dw / [w^2 \cdot (1/R \cdot \sin^2 \beta - 1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta) - 2 \omega w \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta + \partial h / \partial n - f_n]. \quad (24)$$

Hierin bedeuten $dm = \epsilon_m \cdot dq_m$ und $dn = \epsilon_n \cdot dq_n$, mit q_m und q_n als krummlinige Koordinaten und ϵ_m und ϵ_n als Lamesche Koeffizienten. Zwei Lösungen dieses Gleichungssystems lauten

$$q_m = \text{const.} = \xi, \quad (25)$$

$$\Theta = \text{const.} = \zeta. \quad (26)$$

Die dritte Lösung

$$L(w, q_m, q_n, \Theta) = \text{const.} = \eta \quad (27)$$

findet man aus der Gleichung

$$w \cdot dw / (e_n \cdot dq_n) + w^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) + 2 \omega w \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta - \partial h / \partial n + f_n = 0. \quad (28)$$

Eine willkürliche Funktion $\eta = f(\xi, \zeta)$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (23).

Diese Lösung wurde abgeleitet mit denselben Voraussetzungen wie für die allgemeine Bewegungsgleichung (Eulersche Gleichung) und weiterhin wegen der Energiegleichung (21) unter der Voraussetzung, daß die Strömung stationär ist.

Die allgemeine Lösung kann man durch Näherungsverfahren finden, muß jedoch einen großen Arbeitsaufwand in Kauf nehmen. Es ist aber möglich, die Lösung schneller durch eine elektronische Rechenmaschine zu erhalten.

Eine Lösung der Gl. (28)

Als Beispiel für die praktische Anwendung des Verfahrens wird die absolute Strömung in einem schaufelfreien Raum betrachtet. Da dann $f_n = 0$, $\omega = 0$, $w = c$ und $\beta = \alpha$ gesetzt werden kann, vereinfacht sich Gl. (28) zu

$$c \cdot dc / (e_n \cdot dq_n) + c^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \alpha) - \partial h / \partial n = 0. \quad (29)$$

Diese Gleichung läßt sich einfacher auch aus Gl. (14) ableiten, wenn h als Gesamtenergie bezeichnet wird.

Mit der Abkürzung

$$J = \int_{q_{n1}}^{q_n} \left(\frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos \delta}{r} - \frac{\sin^2 \alpha}{R} \right) \epsilon_n \cdot dq_n \quad (30)$$

ist die Lösung von Gl. (29)

$$c^2 \cdot e^{2J} - 2 \cdot \int_{q_{n1}}^{q_n} \frac{\partial h}{\partial n} \cdot e^{2J} \cdot \epsilon_n \cdot dq_n = \text{const.} = \eta. \quad (31)$$

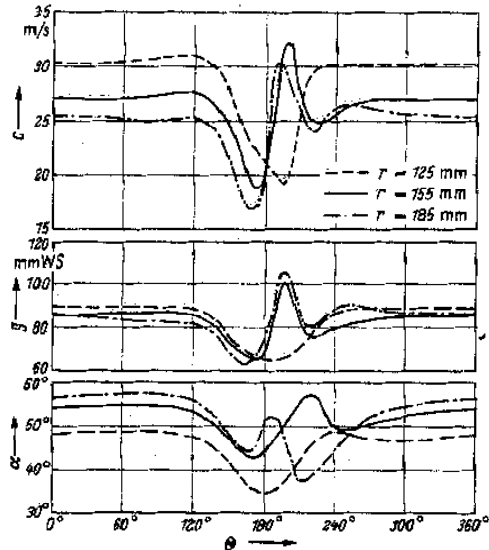


Bild 1. Gemessene Geschwindigkeits-, Gesamtenergie- und Strömungswinkelverteilung über der Abwicklung im Spalt zwischen Lauf- und Leitrad.

Eine willkürliche Funktion $\eta = f(\xi, \zeta)$ gibt das allgemeine Integral der Gl. (23) (für dieses Beispiel)

$$c^2 \cdot e^{2J} - 2 \cdot \int_{q_{n1}}^{q_n} \frac{\partial h}{\partial n} \cdot e^{2J} \cdot \epsilon_n \cdot dq_n = f(\xi, \zeta) = f(q_m, \Theta), \quad (32)$$

worin ξ und ζ aus den Gl. (25) und (26) gesetzt sind. Aus dieser Gleichung erkennt man, daß $f(q_m, \Theta) = c_{n1}^2$ die absolute Geschwindigkeit für $q_n = q_{n1}$ ist, weshalb man die Lösung auch in der Form schreiben kann

$$c = e^{-J} \cdot \left(c_{n1}^2 + 2 \cdot \int_{q_{n1}}^{q_n} \frac{\partial h}{\partial n} \cdot e^{2J} \cdot \epsilon_n \cdot dq_n \right)^{1/2}, \quad (33)$$

wobei noch $\epsilon_n \cdot dq_n = dn$ gesetzt ist.

In dieser Gleichung sind alle Größen von der Koordinate Θ und der Koordinate q_m implizit abhängig; deshalb ändert sich die Form dieser Gleichung nicht für den Fall, daß rotationssymmetrische Strömung vorausgesetzt wird. Die Konstante c_{n1} läßt sich bei rotationssymmetrischer Strömung durch die Kontinuitätsgleichung ermitteln, da dann alle Größen voraussetzungsgemäß unabhängig von Θ sind.

Die Kontinuitätsgleichung für den Massestrom \dot{m} lautet

$$\dot{m} = 2 \pi \cdot \int_0^{2\pi} \rho \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot dn, \quad (34)$$

wobei die Integration längs einer Normallinie über den gesamten Durchströmquerschnitt durchgeführt werden muß ($n = 0$ und $n = n_a$ sind die Endpunkte dieser Normalinie).

Für den allgemeinen Fall lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{n_a} \rho \cdot c \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot dn \cdot d\Theta. \quad (35)$$

Um hieraus die Größe c_{n1} , die jetzt eine Funktion von q_m und Θ ist, für Gl. (33) berechnen zu können, muß noch eine weitere Gleichung bekannt sein, die die Änderung der Geschwindigkeit c über Θ angibt.

Da die Änderung von c über Θ in Integralform nicht bekannt ist, wird im folgenden Zahlenbeispiel die Größe c_{n1} durch Meßdaten gegeben.

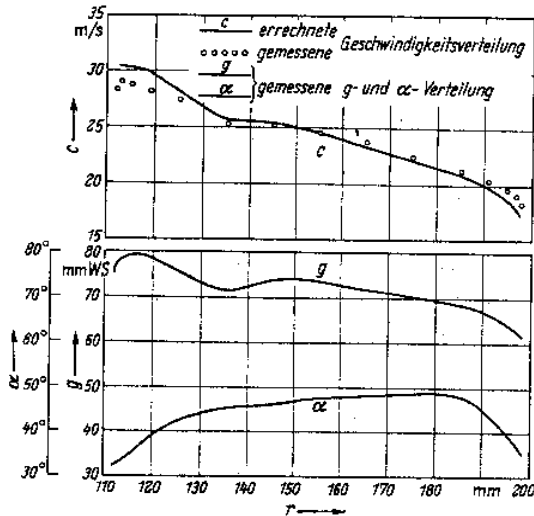


Bild 2. Errechnete Geschwindigkeitsverteilung und gemessene Verteilungen für $\Theta = 0^\circ$.

Zahlenbeispiel

Um die Gültigkeit der abgeleiteten Gleichung (33) für eine nicht-rotationssymmetrische Strömung zu überprüfen, wurden Messungen im Spalt zwischen Lauf- und Leitrad an einem einstufigen Axialgebläse bei gestörter Zuströmung durchgeführt.

In Bild 1 sind die gemessenen Verteilungen

- Gesamtenergie g
- Strömungswinkel α
- und Geschwindigkeit c

über der Abwicklung Θ für drei verschiedene Radien dargestellt. Aus diesem Diagramm ist deutlich zu erkennen, daß die Strömung nicht rotationssymmetrisch ist. Nach Gl. (33) soll jetzt die Geschwindigkeitsverteilung für $\Theta = 0^\circ, 150^\circ$ und 195° aus der gemessenen g - und α -Verteilung

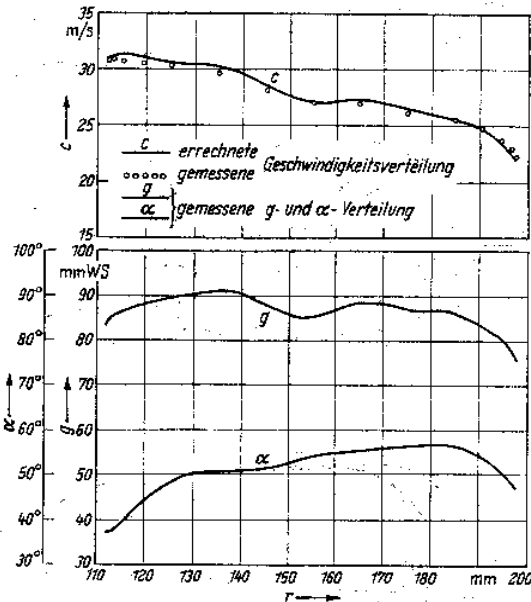


Bild 3. Errechnete Geschwindigkeitsverteilung und gemessene Verteilungen für $\Theta = 150^\circ$.

berechnet und mit der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung verglichen werden.

Für die Berechnung wird vorausgesetzt, daß radiale Geschwindigkeitskomponenten sehr klein sind, d. h. $\delta \approx 0, dn \approx dr, R \approx \infty$. Damit lautet die Gleichung (33)

$$c = e^{-J} \left(c_1 + 2 \int_{r_1}^r \frac{\partial h}{\partial r} e^{2J} dr \right)^{1/2} \quad (36)$$

mit der Abkürzung aus Gl. (30)

$$J = \int_{r_1}^r \frac{\cos^2 \alpha}{r} dr, \quad (37)$$

wobei c_1 die Geschwindigkeit am beliebigen Radius $r = r_1$ bedeutet.

Für dieses Beispiel wird r_1 als arithmetischer Mittelwert zwischen Naben- und Gehäusehalbmesser gewählt.

In den Bildern 2, 3 und 4 sind die gemessenen g - und α -Verteilungen über dem Radius für die gewählten Θ -Werte eingezeichnet. Die daraus nach Gl. (36) berechnete Geschwindigkeitsverteilung über dem Radius ist jeweils als durchgezogene Linie angegeben. Die gemessene Geschwindigkeitsverteilung ist durch Meßpunkte gekennzeichnet.

Aus diesen Diagrammen ist eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zu erkennen. Merkwürdige Abweichungen treten nur im gestörten Bereich ($\Theta = 195^\circ$), und zwar an der Nabe auf. Sie werden damit begründet sein, daß hier radiale Strömungskomponenten nicht vernachlässigbar klein und damit die Voraussetzungen $\delta \approx 0$ und $R \approx \infty$ nicht erfüllt sind.

Zusammenfassung

Das abgeleitete Näherungsverfahren zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in einem bestimmten Querschnitt wurde bisher nur auf rotationssymmetrische Strömung angewendet. Hier wurde anhand einer Ableitung gezeigt, daß die Voraussetzung der Rotationssymmetrie nicht erforderlich und dieses Näherungsverfahren weitergehend auf den Fall der allgemeinen, nicht-rotationssymme-

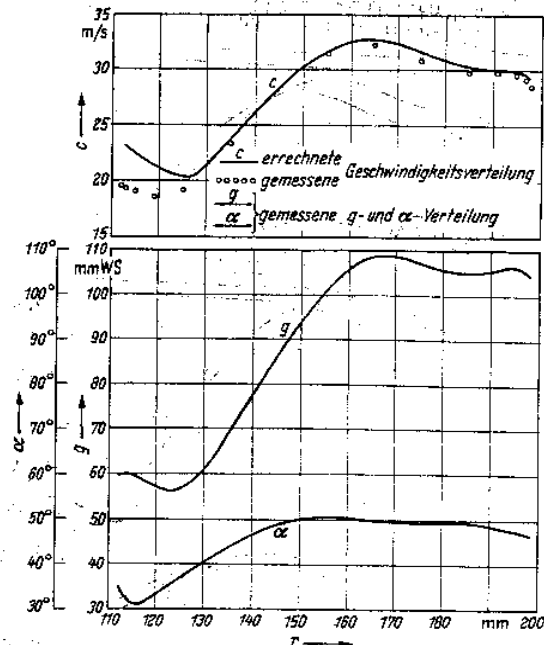


Bild 4. Errechnete Geschwindigkeitsverteilung und gemessene Verteilungen für $\Theta = 195^\circ$.

trischen Strömung anwendbar ist. Aus einem Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Geschwindigkeiten folgt, daß die nach diesem Verfahren berechnete Verteilung gut mit der wirklichen Strömung übereinstimmt.

Schrifttum

1. Petermann, H.: Über den Strömungsverlauf in Axialverdichtern mit konstanter Reaktion von 50%. Konstruktion 8 (1956) Heft 1, S. 1/5.
2. Ackermann, E.: Experimentelle Nachprüfung eines Berechnungsverfahrens für axiale Strömungsmaschinen. Diss. TH Braunschweig 1959.
3. Bammert, K.: Zur Berechnung der Strömung in vielstufigen axialen Turbomaschinen mit beliebiger Beschauelfung. Forsch. Ing.-Wes. 26 (1960) Nr. 1.
4. Bammert, K., und K. Fiedler: Die Strömung in axialen Turbomaschinen. Ing.-Arch. 33 (1964) Heft 5, S. 322/329.
5. Bammert, K., und P. Brütt: Berechnung und Messung der Kennfelder von mehrstufigen Axialturbinen. VDI-Forschungsheft 519 (1967).
6. Strscheletzky, M.: Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drallströmungen inkompressibler Flüssigkeiten. ZAMP Bd. IXb (1958).
7. —: Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen. Ing.-Arch. 19 (1951) und 21 (1953).
8. Eckert, E., und E. Schnell: Axial- und Radialkompressoren. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1961.
9. Linnemann, H.: Verteilung der Meridiangeschwindigkeit in einstufigen Axialgebläsen und Axialpumpen. Konstruktion 16 (1964) Heft 3, S. 102/107.
10. Cordes, G.: Eine einfache Lösung für das Bestimmen des radialen Druckgradienten in axialen Turbomaschinen. VDI-Z. 109 (1967) Nr. 15, S. 685/691.
11. Holmquist, C. O., und W. D. Rannie: An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Axial Turbomachines. Journal of Aeronautical Sc., 23 (1956) Nr. 6.
12. Servy, G. K., und J. C. Lysen: Prediction of Axial-Flow-Turbomachine Performance by Blade-Element Method. J. of Engng. for Power, Trans. ASME, Series A, Vol. 85 (1963).
13. Smith, L. H.: The Radial-Equilibrium Equation of Turbomachinery. J. of Engng. for Power, Trans. ASME, Series A, Vol. 88 (1966).
14. Vavra, M. H.: Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines. New York/London: Wiley 1960.
15. Stepanov, G. Ju.: Gidrodinamika resetok turbomasin. Moskau 1962.
16. Makracuk, V. N., und A. A. Bikov: Pribliznii rascet polja skorosti dlja vnov proektiruemogo dvuhreaktornogo gidrotransformatora obratnogo hoda. Gidroprivod i gidropnevmomatika. Kiew 1966.
17. Tiscenko, A. K.: Rascet skorosti potoka pri vhode v nasosnoe koleso gidrotransformatora pri nalicii cirkulacii. Gidroprivod i gidropnevmomatika, Kiew 1966.
18. Sirotkin, A. Ja.: Rascet osesimetricnogo virevogo potoka nevjazkoj szimaemoj zidkosti v osevih turbomasinah. Izvestija akademii nauk SSSR, Mehanika i masinstroenie No. 2, 1961.
19. —: Proverocnij rascet osevih turbomasin v ramkah teorii cilindriceskoi stupeni dlja soversennogo gaza na BESM-2M. Energomasinstroenie No. 5, 1966.
20. Pejović, S.: An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Turbomachines. Zbornik radova Masinskog fakulteta Beograd, 1959/60.
21. —: Prilog opstoj teoriji prostornog odnosime tricnog strujanja kroz turbomasiine. Dissertation Fakultät für Maschinenwesen der Universität Belgrad, 1964.
22. —: Beitrag zur Berechnung der Strömung in Turbomaschinen. Konstruktion 19 (1967), Heft 9, S. 358/360.
23. Lenck, H.-A.: Untersuchungen an einem einstufigen Axialgebläse mit gestörter Zuströmung. Diss. TH Braunschweig 1967.