S. PEJOVIĆ

OSNOSIMETRIČNO STRUJANJE KROZ TURBOMAŠINE-JEDNAČINA POVRŠINE LOPATICA

Математички весник
4 (19) Св. 1, 1967

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
4 (19), 1967, стр. 39—46

S. Pejović

OSNOSIMETRIČNO STRUJANJE KROZ TURBOMAŠINE — JEDNAČINA POVRŠINE LOPATICA

(Saopšteno 25. maja 1966.)

Analizom osnosimetričnog strujanja kroz turbomašine dobijen je oblik jednačine površina lopatica. Korišćenjem jednačina strujanja izvedene su diferencijalne jednačine lopatica i pokazano je da se, za slučaj potencijalnog strujanja u meridijanskoj ravni uz konstantnu ukupnu energiju struje na ulasku u lopatični prostor, problem rešava pomoću jedne parcijalne diferencijalne jednačine.

Na jednom primeru je pokazan postupak za dobijanje rešenja.

1. Postavljanje problema

1.1. Jednačina kontinuiteta i jednačine kretanja

Sistem jednačina kretanja neviskoznog i nestišljivog fluida napisan u polarno cilindričnom koordinatnom sistemu r, θ, z glasi [3] [4]: Jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial c_r}{\partial r}+\frac{c_r}{r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial c_u}{\partial \theta}+\frac{\partial c_z}{\partial z}=0,$$

gde su c_r, c_u i c_z projekcije brzine na pravce koordinatnih osa r, θ i z, i Lambove jednačine [3], [4]

$$\frac{\partial c_r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{c^2}{2}+c_z\,\Omega_u-c_u\,\Omega_z=F_r-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{c^2}{2}+c_u\,\Omega_r-c_r\,\Omega_u=F_z-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial c_u}{\partial t}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,\frac{c^2}{2}+c_r\,\Omega_z-c_z\,\Omega_r=F_u-\frac{1}{\rho r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta},$$

gde su F_r, F_u i F_z projekcije zapreminske sile na koordinatne pravce r, θ i z, a ρ je gustina, p pritisak, t vreme i

$$\Omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial c_z}{\partial \theta} - \frac{\partial c_u}{\partial z},$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r c_u}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial \theta}\right),$$

$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r},$$

projekcije vrtloga na r, θ i z pravce.

Pošto se analizira stacionarno osnosimetrično strujanje, izvodi svih veličina po vremenu i koordinati θ jednaki su nuli, te prethodne jednačine dobijaju vid

$$\frac{\partial r c_r}{\partial r} + \frac{\partial r c_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$F_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + c_z \Omega_u - c_u \Omega_z, \tag{2}$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + c_u \Omega_r - c_r \Omega_u, \tag{3}$$

$$F_u = c_r \Omega_z - c_z \Omega_r, \tag{4}$$

$$\Omega_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial r c_u}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r c_u}{\partial r}, \tag{6}$$

$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} \tag{7}$$

1.2. Jednačina energije

Ako se sa $\psi(r, z)$ označi strujna funkcija u meridijanskoj ravni, jednačina energije glasi

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \omega r c_u = \Phi(\psi). \tag{8}$$

Funkcija $\Phi(\psi)$ je poznata i ne menja se duž jedne iste strujnice u prostoru jednog niza lopatica. $\omega = \text{const.}$ je ugaona brzina kojom se lopatice kola kreću oko ose simetrije z.

1.3. Jednačina lopatica

Pretpostavka o osnoj simetriji strujanja može se očuvati ako se istovremeno pretpostavi da je i neizmerno mnogo beskrajno tankih lopatica [1], [4], [5]. Sila uzajamnog delovanja fluida i lopatica postaje tada zapreminska spoljašnja sila koja deluje na fluid. Ako je

$$V(r, \theta, z) = C_1, \tag{9}$$

jednačina lopatica, onda je sila kojom lopatice deluju na fluid normalna na element te površine u svakoj tački strujnog prostora [4] i može se izraziti jednačinom

$$\vec{F} = \lambda(r, z) \operatorname{grad} V,$$

ili u skalarnom obliku napisano

$$F_r = \lambda(r, z) \frac{\partial V}{\partial r}, \tag{10}$$

$$F_z = \lambda(r, z) \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{11}$$

$$F_u = \lambda(r, z) \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \tag{12}$$

Da bi strujanje bilo osnosimetrično moraju i sile koje deluju na fluid da imaju osnu simetriju. Da bi osna simetrija bila ispunjena, izvodi projekcija sila po koordinati θ moraju biti jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \lambda(r, z) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \, \partial r} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial \theta} = \lambda(r, z) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \, \partial z} = 0, \tag{13'}$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial \theta} = \lambda(r, z) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0. \tag{14}$$

Jednačina (14) biće zadovoljena ako je funkcija $V(r, \theta, z)$ oblika

$$V(r, \theta, z) = \theta \mu_1(r, z) + \mu(r, z), \tag{15}$$

gde su $\mu(r, z)$ i $\mu_1(r, z)$ proizvoljne funkcije od r i z. Međutim, jednačina (15) mora da zadovolji i uslove (13) i (13'). Ti uslovi biće zadovoljeni ako je

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \, \partial r} = \frac{\partial \mu_1}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \, \partial z} = \frac{\partial \mu_1}{\partial z} = 0,$$

ili

$$\mu_1(r, z) = -K = \text{const.}$$

Konstanta K može imati proizvoljnu vrednost. Znak minus je uzet ispred konstante K radi lakšeg računanja. Prema tome, jednačina površine lopatica (9) odnosno (15) biće oblika

$$V(r, \theta, z) = \mu(r, z) - K\theta = C_1 = \text{const.} \tag{16}$$

a sile koje stvaraju lopatice, prema (10), (11) i (12), dobijaju vid

$$F_r = \lambda(r, z)\frac{\partial \mu}{\partial r}, \tag{17}$$

$$F_z = \lambda(r, z)\frac{\partial \mu}{\partial z}, \tag{18}$$

$$F_u = -\lambda(r, z)\frac{K}{r}. \tag{19}$$

2. **Opšta rasmatranja**

2.1. Transformacija jednačina

Radi lakšeg rasmatranja uvodi se oznaka

$$f(r, z) = rc_u.$$

Zamenom u jednačinama kretanja (2), (3) i (4) pritiska iz jednačine energije (8), projekcije vrtloga Ω_r i Ω_z iz jednačina (5) i (6) i vodeći računa o izrazima za sile (17), (18) i (19) dobija se sistem jednačina

$$F_r = \lambda\frac{\partial \mu}{\partial r} = \left(\omega - \frac{f}{r^2}\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + c_z\Omega_u, \tag{20}$$

$$F_z = \lambda\frac{\partial \mu}{\partial z} = \left(\omega - \frac{f}{r^2}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} - c_r\Omega_u, \tag{21}$$

$$rF_u = -K\lambda = c_r\frac{\partial f}{\partial r} + c_z\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{22}$$

Ω_u je određeno jednačinom (7). Ove jednačine i jednačina kontinuiteta (1) uz poznate granične i početne uslove omogućavaju rešavanje nekih slučajeva osnosimetričnih strujanja idealnog nestišljivog fluida kroz turbomašine.

2.2. Analiza jednačina

Eliminisanjem izvoda $\frac{\partial f}{\partial r}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$ iz jednačina (20), (21) i (22) dobija se

$$\lambda\left[K\left(\omega - \frac{f}{r^2}\right) + c_r\frac{\partial \mu}{\partial r} + c_z\frac{\partial \mu}{\partial z}\right] - c_r\frac{\partial \Phi}{\partial r} - c_z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{23}$$

Pošto je

$$c_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{i} \quad c_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

a $\Phi(\psi)$ je funkcija samo od ψ to je

$$c_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$c_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

pa jednačina (23) prelazi u

(24)
$$c_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + c_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + K\left(\omega - \frac{f}{r^2}\right) = 0.$$

Fizički smisao ove jednačine može se sagledati kada se brzina izrazi u odnosu na pokretni koordinatni sistem vezan za kolo turbomašine koje se ugaonom brzinom $\omega = \text{const.}$ obrće oko ose simetrije z. Veza apsolutnih i relativnih brzina data je izrazima

$$w_r = c_r, \quad w_z = c_z, \quad w_u = c_u - r\,\omega = r\left(\frac{f}{r^2} - \omega\right).$$

Ako se još uoči da je

$$\operatorname{grad} V = \left\{\frac{\partial \mu}{\partial r}, \quad -\frac{K}{r}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z}\right\},$$

jednačina (24) dobija vektorski oblik

(25)
$$\vec{w} \cdot \operatorname{grad} V = 0.$$

Ovaj izraz predstavlja uslov upravnosti vektora relativne brzine i normale površine lopatice u posmatranoj tački. Prema tome, strujnice leže na površini lopatica. Jednačina (25) je uvek zadovoljena pa zato posmatrani sistem jednačina (20), (21) i (22) uvek opisuje neko moguće strujanje.

3. Potencijalno strujanje u meridijanskoj ravni i $\Phi = \text{const.}$

3.1. Diferencijalne jednačine

Potencijalno strujanje u meridijanskoj ravni određeno je jednačinom kontinuiteta (1) i uslovom da projekcija vrtloga u obrtnom pravcu bude jednaka nuli (videti jednačinu (7))

(26)
$$\Omega_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} = 0.$$

Jednačine (20) i (21), zbog uslova $\Phi = \text{const.}$ i jednačine (26), prelaze u

(27)
$$F_r = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial r} = \left(\omega - \frac{f}{r^2}\right) \frac{\partial f}{\partial r},$$

(28)
$$F_z = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} = \left(\omega - \frac{f}{r^2}\right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Deljenjem ovih dveju jednačina dobija se relacija,

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r},$$

koja će biti uvek zadovoljena kada je

(29) $$f = f(\mu),$$

neka funkcija samo od μ. Vodeći računa o vezi (29) bilo koja od jednačina (27) ili (28) daje

(30) $$\lambda = \left(\omega - \frac{f}{r^2}\right) \frac{df}{d\mu},$$

dok jednačina (24) koja je posledica jednačina (20), (21) i (22) glasi

(31) $$c_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + c_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + K\left(\omega - \frac{f(\mu)}{r^2}\right) = 0.$$

Postupak rešavanja direktnog problema (određivanje oblika lopatica), uz poznate početne i granične uslove, je sledeći: Prvo se iz jednačina (1) i (26) odrede brzine c_r i c_z. Zatim se odabere proizvoljna funkcija $f = f(\mu)$ i tada jednačina (31) određuje funkciju μ. Dalje (29) određuje f, (30) daje λ, jednačine (27), (28) i (22) sile F_r, F_z i F_u i jednačina energije (8) pritisak. Postojanje dve proizvoljne funkcije, od kojih jedna figuriše u jednačini (31) a druga je posledica integracije te jednačine, omogućava zadovoljavanje uslova na ulasku u venac lopatica i na izlasku iz lopatičkog prostora uz željeni oblik ulazne i izlazne ivice lopatica.

4. **Primer**

Radi ilustracije primene izvedenih izraza posmatraće se vihorno strujanje kroz aksijalne turbomašine. Ovaj problem je rešen u radu [6].

4.1. Definicija vihornog strujanja

Vihorno strujanje s konstantnom aksijalnom brzinom zadovoljava uslove $c_z = \text{const.}$, $c_r = 0$ i

$$f = f(z),$$

pri čemu je $f(z)$ funkcija samo od koordinate z.

Strujna funkcija u meridijanskoj ravni ima oblik

(32) $$\psi = \frac{c_z r^2}{2},$$

4.2. Analiza strujanja

Pošto je $c_r = 0$ i $c_z = \text{const.}$ to su zadovoljene jednačine (1) i (26), tj. strujanje je u meridijanskoj ravni potencijalno. Međutim jednačine (27) i (28) ne mogu jednovremeno da budu zadovoljene, stoga se za rešavanje ne smeju primeniti jednačine izvedene u odeljku 3, već se problem mora rešavati pomoću opštih jednačina (20), (21) i (22), predpostavljajući $\Phi(\psi) = \Phi(r)$, što je u saglasnosti sa jednačinom (32).

4.3. Postavljanje problema

Jednačine (20), (21) i (22), s obzirom da je $c_r = 0$, $c_z = \text{const.}$, $f = f(z)$, $\Omega_u = 0$ i $\Phi = \Phi(r)$, prelaze u

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial r} = \Phi'(r), \tag{33}$$

$$\lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} = \left(\omega - \frac{f(z)}{r^2}\right) f'(z), \tag{34}$$

$$-K\lambda = c_z f'(z). \tag{35}$$

Zamenom λ iz jednačine (35) u jednačine (33) i (34) dobija se

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = -\frac{K\Phi'(r)}{c_z f'(z)}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{K}{c_z}\left(\omega - \frac{f(z)}{r^2}\right). \tag{37}$$

Ovaj sistem jednačina određivaće funkciju μ ako je zadovoljen uslov

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial r\, \partial z} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial z\, \partial r}.$$

Zamenom desnih strana jednačina (36) i (37) nalazi se

$$\Phi'(r) \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{f'(z)}\right] = 2\, \frac{f(z)}{r^3},$$

ili

$$r^3 \Phi'(r) = -2\, \frac{f(z) f'^2(z)}{f''(z)} = \pm A^2, \tag{38}$$

gde je A^2 proizvoljna pozitivna konstanta. Znak ispred A^2 može biti ili plus ili minus, što zavisi od slučaja koji se posmatra. Jednačina (38) biće zadovoljena za bilo koju vrednost proizvoljne konstante.

Kada se iz jednačina (38) odrede funkcije $\Phi'(r)$ i $f(z)$ sistem jednačina (36) i (37) daje rešenje za $\mu(r, z)$ a iz (16) se nalazi jednačina lopatica, [6],

$$V = K\left[\frac{1}{c_z}\left(\pm \frac{A^2 C'}{2r^2}\, e^{\pm\left(\frac{f}{A}\right)^2} - \omega z\right) - \theta\right] = C,$$

gde je $f(z)$ određeno jednačinom

$$z = C' A \int_0^{f/A} e^{\pm x^2}\, dx + C'',$$

C, C' i C'' su konstante integracija.

LITERATURA

[1.] Степанов, Г. Ю., *Гидродинамика решеток турбомашин*, Москва, 1962.

[2.] Колтон А. Ю., Этинберг, И. Э., *Основи теорий и гидродинамического расчета водяных турбин*. Москва 1958.

[3.] Кочин Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., *Теоретическая гидромеханика*, часть I. Москва 1963.

[4.] Hawthorne, W. R., *Aerodynamics of Turbines and Compressors*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press. 1964.

[5.] Pejović S., *Doktorska teza*, Mašinski fakultet Beograd 1964.

[6.] Pejović S., *The Equation of Blades of Axial Turbomachines for Free-Vortex Flow*. Matematički vesnik 2 (17), Sv. 1, 1965.

[7.] Pejović S., *Investigations of the Axially Simmetric Flow of a Frictionless Fluid through Turbomachines*. Matematički vesnik 2 (17), Sv. 3, 1965.

[8.] Степанов, В. В., *Курс дифференциальных уравнений*. Москва 1945.

AXIALLY SYMMETRIC FLOW THROUGH TURBOMACHINES — THE EQUATION OF BLADE SURFACES

S. Pejović

Summary

The analysis of the axially symmetric flow through turbomachines gives the form of the equation which can represent the blades. Using the equations of motions it is deduced the differential equations of the blade surfaces. For a potential motion in meridional sections and a constant intake energy the problem reduces to one partial differential equation. An example shows a method of solving.