

Beitrag zur Berechnung der Strömung in Turbomaschinen

Von Dr.-Ing. S. Pejović, Belgrad*

English translation of abstract

Pejovic S

(A Contribution to the Theory of Calculation of Flow in Rotating Machines)
Beitrag zur Berechnung der Strömung in Turbo-Maschinen,
Konstruktion, 19 (1967), Heft 9, pp. 358-360.

Starting with Euler's- and energy equations, the procedure for estimating the velocities is developed, if their directions are known. Examples of calculations were compared to the measurements. Firstly, the outlet velocities behind the cylindrical cascade of blades were calculated, and the influence of total energy distribution and outlet velocities' angles analysed, in the first case, for constant energy distribution, and in the second case both the constant energy distribution and constant velocity direction. When velocity distribution between the rows of rotor and the stator blades of the multi-stage axial compressor, constructed to have the constant reaction ratio, were calculated, with or without considering the impact of centrifugal pressure force produced by curvature of meridian streamline. The calculated velocity distribution agreed well with the measured flow velocity.

Der Beitrag geht von der Eulerschen Grundgleichung und der Energiegleichung aus und leitet ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung für den Fall ab, daß die Strömungsrichtung bekannt ist. In Beispielen wird die Geschwindigkeitsverteilung berechnet und mit gemessenen Verteilungen verglichen. Zuerst wird die Geschwindigkeitsverteilung hinter einem zylindrischen Schaufelgitter berechnet und der Einfluß der Gesamtenergieänderung und der Strömungsrichtungsänderung auf die Verteilung durch weitere Rechnung gezeigt, die einmal mit konstanter Energieverteilung und zum anderen mit konstanter Energieverteilung und konstanter Strömungsrichtung durchgeführt wird. Dann wird die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt zwischen Lauf- und Leitrad einer Axialverdichterstufe bei konstantem Reaktionsgrad mit und ohne Berücksichtigung der durch die Krümmung der Meridianstromlinien erzeugten Fliehkraft berechnet. Die berechneten Geschwindigkeitsverteilungen stimmen gut mit den gemessenen überein.

Allgemeine Strömungsgleichungen

Die allgemeinen Strömungsgleichungen lauten bei stationärer Bewegung

$$(\vec{c} \nabla) \vec{c} = -1/\rho \cdot \nabla p + \vec{f}, \tag{1}$$

wobei \vec{c} Geschwindigkeitsvektor, ρ Dichte des strömenden Mittels, p örtlicher Druck und \vec{f} eine Feldkraft, durch die etwa die Wirkung einer Beschleunigung bei unendlicher Schaufelzahl dargestellt werden kann. In Zylinderkoordinaten lautet die Gleichung

$$c_r \cdot \partial c_r / \partial r + c_u / r \cdot \partial c_r / \partial \varphi + c_z \cdot \partial c_r / \partial z - c_u^2 / r = -1/\rho \cdot \partial p / \partial r + f_r, \tag{2}$$

$$c_r \cdot \partial c_u / \partial r + c_u / r \cdot \partial c_u / \partial \varphi + c_z \cdot \partial c_u / \partial z + c_r \cdot c_u / r = -1/(\rho r) \cdot \partial p / \partial \varphi + f_u, \tag{3}$$

$$c_r \cdot \partial c_z / \partial r + c_u / r \cdot \partial c_z / \partial \varphi + c_z \cdot \partial c_z / \partial z = -1/\rho \cdot \partial p / \partial z + f_z, \tag{4}$$

wobei r Achsabstand, φ Umfangswinkel, z axiale Koordinate, c_r , c_u , c_z , f_r , f_u und f_z Komponenten von \vec{c} und \vec{f} in Richtung des Radius r , des Umfangs und der Achse z .

Beschränkt man sich auf den rotationsymmetrischen Fall ($\partial/\partial\varphi = 0$), so erhält man aus den Gln. (2)–(4)

$$c_r \cdot \partial c_r / \partial r + c_z \cdot \partial c_r / \partial z - c_u^2 / r = -1/\rho \cdot \partial p / \partial r + f_r, \tag{5}$$

$$c_r \cdot \partial c_u / \partial r + c_z \cdot \partial c_u / \partial z + c_r \cdot c_u / r = f_u, \tag{6}$$

$$c_r \cdot \partial c_z / \partial r + c_z \cdot \partial c_z / \partial z = -1/\rho \cdot \partial p / \partial z + f_z. \tag{7}$$

* Die Arbeit entstand im Pfeleiderer-Institut für Strömungsmaschinen der TH Braunschweig. Der Verf. ist Forschungsstipendiat der Alexander von Humboldt-Stiftung.

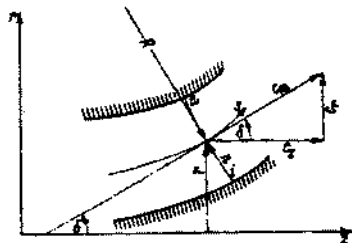


Bild 1. Meridianschnitt.

Durch Koordinatentransformation erhält man

$$dc_u/dt - c_u^2/r \cdot \sin \delta = -1/\rho \cdot \partial p / \partial s + f_s, \tag{8}$$

$$c_u^2/R - c_u^2/r \cdot \cos \delta = -1/\rho \cdot \partial p / \partial n + f_n, \tag{9}$$

$$d(r \cdot c_u)/dt = r f_u, \tag{10}$$

wobei s Länge einer Meridianstromlinie, n Länge einer zu den Stromflächen senkrechten Linie, $c_m = (c_r^2 + c_z^2)^{0,5}$ Meridiankomponente der örtlichen Geschwindigkeit, R Krümmungsradius der Meridianstromlinie, t Zeit, f_s , f_u und f_n Komponenten von \vec{f} in s -, n - und Umfangsrichtung. Die Bedeutung von δ kann man aus Bild 1 entnehmen.

Die absolute Geschwindigkeit \vec{c} entsteht durch vektorielle Addition der Relativgeschwindigkeit w und der Umfangsgeschwindigkeit $u = r\omega$ ($\omega = \text{const. Winkelgeschwindigkeit}$)

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}, \tag{11}$$

Aus den Gln. (3)–(11) ergibt sich

$$dw/dt \cdot \sin \beta + w \cdot \cos \beta \cdot d\beta/dt - (w \cos \beta + \omega r)^2/r \times \sin \delta = f_s - 1/\rho \cdot \partial p / \partial s, \tag{12}$$

$$w^2/R \cdot \sin^2 \beta - (w \cos \beta + \omega r)^2/r \cdot \cos \delta = f_n - 1/\rho \cdot \partial p / \partial n, \tag{13}$$

$$dw/dt \cdot \cos \beta - w \sin \beta \cdot d\beta/dt + w^2/r \times \sin \delta \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + 2 w \omega \cdot \sin \delta \cdot \sin \beta = f_u; \tag{14}$$

β ist der Winkel zwischen w und u .

Die Energiegleichung für die Relativströmung lautet

$$\int dp/\rho + (w^2 - u^2)/2 = h(n). \tag{15}$$

$h(n)$ ist für jede Stromfläche eine Konstante, die sich mit n ändern kann.

Aus den Gln. (13) und (15) ergibt sich

$$w \cdot \partial w / \partial n + w^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) + 2 w \omega \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta - \partial h / \partial n + f_n = 0. \tag{16}$$

Um Gl. (16) längs einer Normallinie n (Bild 1) integrieren zu können, wird sie umgeschrieben:

$$w \cdot dw/dn + w^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) + 2 w \omega \cos \beta \cdot \cos \delta - dh/dn + f_n = 0. \tag{17}$$

Lösungen der Gl. (17)

Da im folgenden entweder ein schaufelfreier Raum oder die Beschauung, die kleine Feldkraftkomponenten in der Normalrichtung zu den Stromflächen erzeugt, betrachtet werden kann, kann $f_n = 0$ gesetzt werden. Es ist trotzdem nicht möglich, ein allgemeines Integral in geschlossener Form zu erhalten. Für den allgemeinen Fall integriert man durch das Überungsverfahren und muß daher einen großen Arbeitsaufwand in Kauf nehmen. Es ist aber möglich, die Lösung durch eine elektronische Rechenmaschine zu erhalten.

Konstanter Energieinhalt

Setzt man konstanten Energieinhalt vor der Beschauung und reibungsfreie Strömung voraus, so ist $h = \text{const.}$, und aus Gl. (17) wird ($f_n = 0$):

$$v/dn + w \cdot (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) + 2w \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta = 0 \quad (18)$$

ist

$$J = \int_m^n (1/r \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \beta) dn \quad (19)$$

ergibt sich die Integration längs der Normallinie

$$= \exp(-J) [w_{(m)} - 2w \int_m^n \exp(J) \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot dn] \quad (20)$$

ist $w_{(m)}$ als einer noch festzulegenden Größe der mittleren Geschwindigkeit.

Außerdem muß die Kontinuitätsbedingung für das gesamte strömende Volumen

$$V = 2\pi \int r w \sin \beta \cdot dn \quad (21)$$

erfüllt werden. Damit kann man unter Beachtung von Gl. (21) aus Gl. (20) den w -Verlauf errechnen.

Absolute Geschwindigkeitsverteilung

Für die absolute Strömung ist $\omega = 0$, $w = c$ und $\beta = \alpha$. und Gl. (17) wird ($f_n = 0$)

$$dc/dn + c^2 \cdot (1/r \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \alpha) - dh/dn = 0 \quad (22)$$

ist

$$J = \int_m^n (1/r \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \delta - 1/R \cdot \sin^2 \alpha) dn \quad (23)$$

ergibt die Integration längs einer Normallinie

$$c = \exp(-J) \cdot [c_{(m)}^2 + 2 \int_m^n dh/dn \cdot \exp(2J) \cdot dn]^{1/2} \quad (24)$$

mit $c_{(m)}$ als einer noch festzulegenden Größe der mittleren Geschwindigkeit. Unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung

$$V = 2\pi \int r c \cdot \sin \alpha \cdot dn \quad (25)$$

kann man aus Gl. (24) den c -Verlauf errechnen.

Zahlenbeispiele und Vergleich mit Versuchsergebnissen

Geschwindigkeitsverteilung hinter dem axialen Schaufelgitter

Als erstes Beispiel wird die Strömung hinter dem axialen Schaufelgitter mit zylindrischen Schaufeln errechnet und mit Versuchsergebnissen [3] verglichen.

Für die Axialströmung hinter dem Gitter kann man $R \approx \infty$, $dn \approx dr$ und $\delta \approx 0$ annehmen und erhält aus Gl. (23)

$$J = \int_m^n 1/r \cdot \cos^2 \alpha \cdot dr \quad (26)$$

und aus Gl. (24)

$$c = \exp(-J) \cdot [c_{(m)}^2 + 2 \int_m^n \exp(2J) \cdot dh]^{1/2} \quad (27)$$

In dimensionsloser Schreibweise ergibt sich

$$J^* = J = \int_m^n 1/r^* \cdot \cos^2 \alpha \cdot dr^* \quad (28)$$

und

$$c^* = \exp(-J) \cdot [c_{(m)}^2 + \int_m^n \exp(2J) \cdot d\zeta^*]^{1/2} \quad (29)$$

mit $c^* = c/c_1$, $d\zeta^* = -2 dh/c_1^2$ und $r^* = r/r_0$, wobei c_1 der Mittelwert der Axialgeschwindigkeitskomponenten ist. Die Integrationskonstante $c_{(m)}$ wird aus der Kontinuitätsgleichung errechnet.

Aus der gemessenen Verteilung des Abströmwinkels α und der Gesamtenergie $-\zeta$ hinter dem zylindrischen Schaufelgitter wurde mit Hilfe der Gl. (29) für denselben Querschnitt die Geschwindigkeitsverteilung errechnet und mit der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung verglichen. In weiteren Rechnungen setzte man besondere Winkel- und Gesamtenergieverteilungen voraus, um deren Einfluß auf die errechnete Geschwindigkeitsverteilung zu untersuchen.

In Bild 2 ist die aus Gl. (29) mit den gemessenen α - und ζ -Werten errechnete Geschwindigkeitsverteilung ausgezogen dargestellt. Die strichpunktierte Linie gibt die Geschwindigkeitsverteilung an, die aus der gemessenen α -Verteilung unter der Annahme $\zeta = \text{const.}$ errechnet wurde. Die gestrichelte Linie gibt die errechnete Geschwindigkeitsverteilung unter der Annahme $\alpha = 23^\circ$ und $\zeta = \text{const.}$ Die gemessene Geschwindigkeits-, α - und ζ -Verteilung ist mit einzelnen Meßpunkten und ausgezogenen Linien angegeben. Bild 2 zeigt, daß die errechnete Geschwindigkeitsverteilung (ausgezogene Linie) und die gemessene Geschwindigkeitsverteilung um weniger als 3% voneinander abweichen.

Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Laufrad von Axialverdichtern mit Reaktionsgrad 50%

Als zweites Beispiel für die praktische Anwendung des Verfahrens wird die Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Laufrad eines aus Vorleitrad, Laufrad und Nachleitrad bestehenden einstufigen Axialverdichters mit 50% Reaktion errechnet und mit Versuchsergebnissen [4] verglichen. Für die Berechnung wurde folgender Arbeitspunkt des Verdichters gewählt: Schaufelarbeitszahl $Y_{uA} = 2 Y_{uA}/u_2^2 = 0,6$, Lieferzahl $\varphi = V/A u_2 = 0,66$ bei der Drehzahl $n = 49,33 \text{ s}^{-1}$. Dabei sind Y_{uA} Schaufelarbeitszahl, V Volumenstrom, A Querschnitt, u_2 Umfangsgeschwindigkeit.

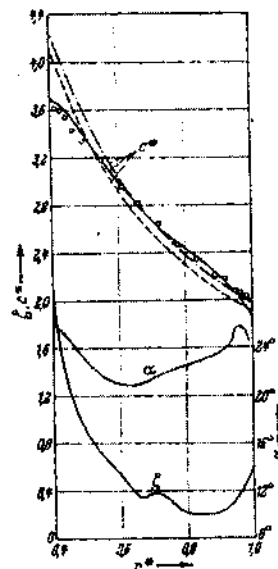


Bild 2. Vergleich der gemessenen und errechneten Geschwindigkeitsverteilung hinter dem zylindrischen Schaufelgitter.

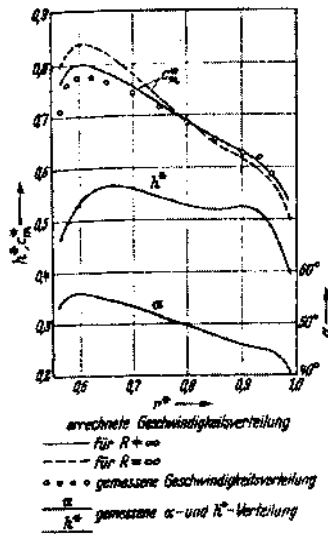


Bild 3. Gemessene und errechnete Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Laufrad eines Axialverdichters mit 50% Reaktion.

Im folgenden wird die Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Laufrad unter Berücksichtigung des Krümmungsradius berechnet, wobei für die Krümmung ein sinusförmiger Verlauf angenommen wird:

$$1/|R^*| = 1/2 |R_m^*| \cdot (1 - \cos [2\pi/(1 - r_1^*) \cdot (r^* - r_1^*)]) = 1/|R_m^*| \cdot \sin^2 [\pi/(1 - r_1^*) \cdot (r^* - r_1^*)] \quad (30)$$

worin $R^* = R/r_a$ dimensionsloser Krümmungsradius einer beliebigen Stromlinie, R_m^* Krümmungsradius der mittleren Stromlinie am Mittelradius $r_m^* = (1 + r_1^*)/2$ und $r_1^* = r_1/r_a$. Der absolute Betrag des Krümmungsradius vom Meridianschnitt der mittleren Flußfläche wird nach [2] ermittelt.

$$R_m^* = 2 \varphi^2 [16 \epsilon^{**}/(\pi^2 - \pi^2 r_1^{**}) + 1 - r_1^{**}] / [\psi_{100} \cdot \ln(1/r_1^{**})] = 1,915 \quad (31)$$

wobei $\epsilon^{**} = 0,306$ die dimensionslose axiale Baulänge einer Schaufelreihe.

Die Gln. (23) und (24) zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung lauten für Axialmaschinen, d. h. $\delta \approx 0$, in dimensionsloser Schreibweise

$$J^* = J = \int_{r_m^*}^{r^*} (1/r^* \cdot \cos^2 \alpha - 1/R^* \cdot \sin^2 \alpha) dr^* \quad (32)$$

und

$$c^* = \exp(-J) [c_{(m)}^{*2} + \int_{r_m^*}^{r^*} \exp(2J) dh^*]^{1/2} \quad (33)$$

wobei $c^* = c/u_a$ und $dh^* = 2 dh/u_a^2$. Die Integrationskonstante $c_{(m)}^*$ erhält man aus der Kontinuitätsgleichung.

Mit diesen Gleichungen wurde aus der gemessenen Verteilung des Strömungswinkels α und der gemessenen Gesamtenergie h^* hinter dem Laufrad die Meridiangeschwindigkeitsverteilung $c_m = c^* \cdot \sin \alpha$ berechnet, einmal mit der Vereinfachung $R = \infty$, d. h. unter Vernachlässigung der durch die Krümmung der Meridianstromlinien vorhandenen Fliehkraft, und sodann für den allgemeinen Fall, bei dem diese nicht vernachlässigt wird. Diese c_m -Verteilungen werden mit der gemessenen Verteilung verglichen.

In Bild 3 ist oben die berechnete Geschwindigkeitsverteilung mit $R = \infty$ gestrichelt, die c_m -Verteilung unter Berücksichtigung der Fliehkraft ausgezogen eingezeichnet. Gemessene c_m -Werte sind durch Punkte angegeben. Auch hier sind die gemessene h^* - und α -Verteilung eingezeichnet. Die Abweichung der errechneten c_m -Verteilung von der gemessenen beträgt weniger als 3,5%.

Zusammenfassung

Das Näherungsverfahren erlaubt die Berechnung der dreidimensionalen axialsymmetrischen Strömung in axialen Turbomaschinen; es ist auf alle Arten von Strömungsmaschinen anzuwenden und gilt in ähnlicher Form auch für kompressible Medien. Aus dem Vergleich der errechneten und gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen folgt, daß die nach diesem Verfahren errechneten Strömungen mit der wirklichen Strömung gut übereinstimmen, obwohl im zweiten Beispiel die Krümmungsradien nach einem Näherungsverfahren ermittelt wurden.

Schrifttum

1. Pejović, S.: Prilog opštoj teoriji prostornog osnosimetričnog strujanja kroz turbomasine. Diss. Fak. f. Maschinenwes. der Univ. Belgrad 1964.
2. Petermann, H.: Über den Strömungsverlauf in Axialverdichtern mit konstanter Reaktion von 50%. Konstruktion 8 (1956) Heft 1, S. 1/5.
3. Schäffer, H.: Untersuchungen über die dreidimensionale Strömung durch axiale Schaufelgitter mit zylindrischen Schaufeln. Diss. TH Braunschweig 1934. Auszug Forsch. Ing.-Wes. 21 (1955).
4. Ackermann, E.: Experimentelle Nachprüfung eines Berechnungsverfahrens für axiale Strömungsmaschinen. Diss. TH Braunschweig 1959.
5. Bammert, K.: Zur Berechnung der Strömung in vieltufigen axialen Turbomaschinen mit beliebigter Beschauelung. Forsch. Ing.-Wes. 26 (1960).
6. Strscheletzky, M.: Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen. Ing.-Arch. 19 (1951) und 21 (1953).
7. —: Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drallströmungen inkompressibler Flüssigkeiten. ZAMP IX b (1958).
8. Holmquist, C. O., und W. D. Rannie: An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Axial Turbomachines. J. Aeron. Sci. 23 (1956) 6.
9. Sirotkin, Ja. A.: Rasčet osesimetricnogo vjrevogo potoka nevjazkoj szimaemoj zidkosti v osevih turbomasinah. Izvestija akademii nauk SSSR. Mehanika i masinstroenije 2 (1961).
10. Stepanov, G. Ju.: Gidrodinamika resetok turbomasin. Moskau, 1962.

[Back to home page](#)

[Go to Curriculum Vitae](#)