С. ПЕЈОВИЋ
S. PEJOVIĆ

ПРИБЛИЖНИ ПРОРАЧУН ПРОСТОРНОГ СТРУЈАЊА СТИШЉИВОГ ФЛУИДА КРОЗ ТУРБОМАШИНЕ

AN APPROXIMATE METHOD OF CALCULATING THREE-DIMENSIONAL COMPRESSIBLE FLOW IN TURBOMACHINES

Отисак из Зборника радова Машинског факултета за 1959-60 годину

Reprinted from Scientific Works of the Faculty of Mechanical Engineering 1959-60, Beograd

БЕОГРАД
1960

СТАНИСЛАВ Т. ПЕЈОВИЋ

ПРИБЛИЖНИ ПРОРАЧУН ПРОСТОРНОГ СТРУЈАЊА СТИШЉИВОГ ФЛУИДА КРОЗ ТУРБОМАШИНЕ

Увод — У свом дипломском раду[1)] проучавао сам Holmquist-Rannie-ев [1][2)] начин уобличавања компресорских ступњева кроз које протиче стишљив флуид претпостављајући да се контуре струјног простора јако разликују од правих паралелних оси струјања. Том приликом сам уочио да је у вези с просторним струјањем погодније да се промена величина, које карактеришу поменуто струјање, посматра дуж нормале меридијанских струјница. Ради тога било је потребно Euler-ову векторску диференцијалну једначину кретања флуида разложити у правцу тангенте и нормале меридијанске струјнице. То је дало могућност да се дође до подеснијег система једначина, које олакшавају решавање посматраног проблема. Изложени начин одређивања величина стања може се применити и за турбине, као и за анализу нестишљивог струјања у турбомашинама.

ОЗНАКЕ

$\vec{a}$ — убрзање флуидног делића
a_N — компонента убрзања $\vec{a}$ у правцу $\vec{N}$
a_T — компонента убрзања $\vec{a}$ у правцу $\vec{T}$
a_r — радијална компонента убрзања $\vec{a}$
a_u — обимна компонента убрзања $\vec{a}$
a_z — аксијална компонента убрзања $\vec{a}$
A — механички еквивалент топлоте
$\vec{c}$ — апсолутна брзина флуидног делића
c_m — меридијанска компонента брзине $\vec{c}$
c_r — радијална компонента брзине $\vec{c}$
c_u — обимна компонента брзине $\vec{c}$
c_z — осна компонента брзине $\vec{c}$
c_p — специфична топлота при сталном притиску
$\vec{c}_0$ — јединични вектор циркуларног правца
e — укупна енергија
$\vec{F}$ — запреминска сила рачуната по јединици масе
F_N — компонента силе $\vec{F}$ у правцу $\vec{N}$
F_T — компонента силе $\vec{F}$ у правцу $\vec{T}$
F_u — компонента силе $\vec{F}$ у правцу $\vec{c}_0$
g — убрзање теже
h_{stv} — стварни напор
$\vec{k}$ — јединични вектор аксијалног правца
K — кривина
M — проток масе
n — изложилац политропе
N — лук нормале меридијанских струјница
$\vec{N}$ — јединични вектор нормале меридијанских струјница
p — апсолутни притисак
r — полупречник
$\vec{r}_o$ — јединични вектор радијалног правца
R — гасна константа
R_k — полупречник кривине
T — лук меридијанске пројекције струјнице, апсолутна температура
$\vec{T}$ — јединични вектор тангенте меридијанске пројекције струјнице
z — координата
α — угао између позитивних смерова обимне брзине и апсолутне брзине
β — угао између негативне обимне брзине и позитивне релативне брзине
δ — угао између $\vec{c}_m$ и $\vec{c}_z$
η_{pol} — политропски степен корисности
$\varkappa$ — изложилац изентропе
ρ — флуидна густина
φ — координата
ω — угаона брзина

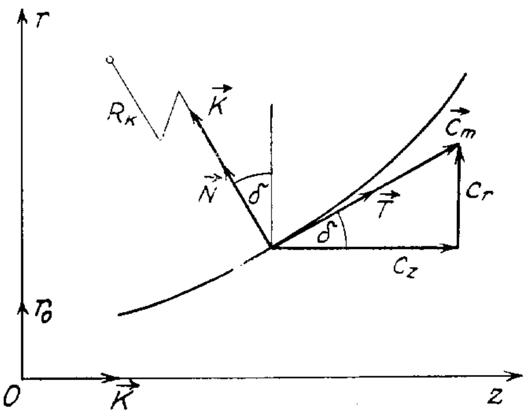
1) Овај рад сам радио код проф. Н. Обрадовића у току 1958 год.
2) Бројеви у загради односе се на литературу.

Разлагање Euler-ове диференцијалне једначине у правцу тангенте и нормале меридијанске струјнице — Euler-ova једначина кретања у векторном облику гласи

(1) $$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

па треба наћи пројекције појединих њених чланова на тангенти $\vec{T}$ и нормали $\vec{N}$ меридијанске струјнице.

У цилиндарском координатном систему меридијанска струјница је одређена једначином (сл. 1):



Сл. 1. Меридијански пресек

(2) $$\vec{c}_m = c_m \vec{T}.$$

Компоненте убрзања дане су изразима

(3) $$a_r = \dot{c}_r - \frac{c_u^2}{r}$$

(4) $$a_u = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r c_u),$$

(5) $$a_z = \dot{c}_z,$$

а кривина изразом

(6) $$K = \frac{1}{R_k} = \frac{\begin{vmatrix} c_z & c_r \\ \dot{c}_z & \dot{c}_r \end{vmatrix}}{(c_z^2 + c_r^2)^{3/2}} = \frac{\dot{c}_r c_z - \dot{c}_z c_r}{c_m^3},$$

где је $c_m^2 = c_z^2 + c_r^2$.

Из слике 1 следује

(7) $$\cos \delta = \frac{c_z}{c_m},$$

(8) $$\sin \delta = \frac{c_r}{c_m},$$

па се за јединични вектор у правцу тангенте добива

(9) $$\vec{T} = \frac{c_r}{c_m} \vec{r}_o + \frac{c_z}{c_m} \vec{k},$$

а у правцу нормале

(10) $$\vec{N} = \frac{c_z}{c_m} \vec{r}_o - \frac{c_r}{c_m} \vec{k}.$$

Пројекције убрзања на тангенту и нормалу, према (6), (7), (8) и релацији

$$c_m \dot{c}_m = c_z \dot{c}_z + c_r \dot{c}_r,$$

износе

(11) $$a_T = \left(\vec{a} \cdot \vec{T}\right) = \dot{c}_m - \frac{c_u^2}{r} \sin \delta,$$

(12) $$a_N = \left(\vec{a} \cdot \vec{N}\right) = \frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r} \cos \delta.$$

Разлагањем векторне једначине (1) добива се

(13) $$\frac{c_m^2}{R_k} - \frac{c_u^2}{r} \cos \delta = F_N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N},$$

(14) $$\dot{c}_m - \frac{c_u^2}{r} \sin \delta = F_T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T},$$

$$(15)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rc_u)=F_u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}.^{1)}$$

што претставља Euler-ове диференцијалне једначине у траженом облику. Једначина (15) је пројекција у циркуларном правцу (облик је познат).

При извођењу једначина (13), (14) и (15) нису учињене никакве претпоставке, те имају општи карактер као и векторна једначина (1).

Прорачун струјања — При извођењу ће се претпоставити да је флуид невискозан и хомоген, струјање устаљено и осно симетрично, да има неизмерно много лопатица а да нема силе у правцу нормале меридијанских струјница. Даље се претпоставља да је неремећена зона тик решетке и да се гас понаша као да је идеални.

Ако се стање гаса мења по политропи константног изложиоца важе једначине

$$(16)\qquad \frac{\rho_3}{\rho_o}=\left(\frac{p_3}{p_o}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{T_3}{T_o}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$(17)\qquad \frac{p}{\rho}=gRT,$$

$$(18)\qquad \frac{\varkappa-1}{\varkappa}=\frac{AR}{c_p}.$$

Основна једначина турбомашина гласи

$$(19)\qquad gh_{stv}=\omega\, r_3 c_{3u}-\omega\, r_o c_{ou},$$

при чему се индекс „0“ односи на улаз а индекс „3“ на излаз компресорског кола. Проласком флуида кроз радни венац лопатица енергија се повећава за h_{stv} па је

$$(20)\qquad \frac{\varkappa}{\varkappa-1}gRT_{ot}=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_3}{\rho_3}+\frac{c_{3m}^2+c_{3u}^2}{2}-gh_{stv}.$$

T_t је тотална температура дана изразом

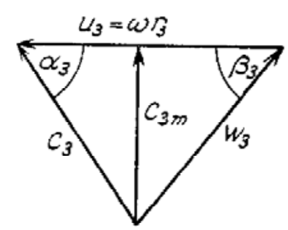
$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}gRT_t=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}+\frac{c^2}{2}.$$

Из троуглова брзина (сл. 2) следује

$$(21)\qquad c_{3u}=\omega\, r_3-c_{3m}\operatorname{ctg}\beta_3.$$

Политрописки степен корисности износи

$$(22)\qquad \eta_{pol}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{n}{n-1}.$$



Сл. 2. Троугао брзина

Како је $F_N\approx 0$, то једначина (13) прелази у

$$(23)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N}=\frac{c_u^2}{r}\cos\delta-\frac{c_m^2}{R_k},$$

чијом се интеграцијом, према (16), налази

$$(24)\qquad \frac{n}{n-1}\frac{p_3}{\rho_3}=\frac{n}{n-1}gRT_3=\int\left(\frac{c_{3u}^2}{r_3}\cos\delta_3-\frac{c_{3m}^2}{R_{k3}}\right)dN_3+C'''.$$

Овде је $C'''=C'''\,(T)$ константа за одређени пресек дуж нормале меридијанских струјница, али се вредност константе мења померањем пресека дуж струјница.

[1] До сличних једначина се може доћи употребом одговарајућих израза развијених у сферном координатном систему.

На улазу радног венца познате су величине стања: притисак p_o густина ρ_o, температура T_o, обимна брзина c_{ou}, и меридијанска брзина c_{om}. Стога из горњег система једначина следује (решавањем по c_{3u})

$$\left(\frac{c_{3u}^2}{2} - \omega\, r_3 c_{3u}\right)\frac{1}{\cos^2\beta_3} + \frac{1}{\eta_{pol}}\int\left[\left(\frac{\cos\delta_3}{r_3} - \frac{\operatorname{tg}^2\beta_3}{R_{k3}}\right)c_{3u}^2 + \frac{2\,\omega\, r_3 c_{3u}\operatorname{tg}^2\beta_3}{R_{k3}}\right]dN_3 = \tag{25}$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, gRT_{ot} - \frac{C'''}{\eta_{pol}} - \frac{\omega^2 r_3^2 \operatorname{tg}^2\beta_3}{2} + \frac{1}{\eta_{pol}}\int \frac{\omega^2 r_3^2\operatorname{tg}^2\beta_3}{R_{k3}}\, dN_3 - \omega\, r_o c_{ou}.$$

У овој једначини непознато је c_{3u}. Излазни угао β_3, који је одређен обликом лопатица (директни проблем) мења се дуж нормале меридијанских струјница. Угао између брзина c_{3m} и c_{3z} дан с

$$\operatorname{tg}\delta_3 = \frac{c_{3r}}{c_{3z}} = \frac{dr_3}{dz_3} \tag{26}$$

и полупречник кривине R_{k3} одредиће се из претпостављеног облика струјница. Интеграли ће се решити на један од познатих начина приближног решавања узимајући за c_{3u} ону вредност која задовољава једначину (25). За интграциону константу се, прво, узима нека вредност, затим, одреди се c_{3u} на описани начин, па се c_{3m} срачуна из једначине (21), температура из (24) а притисак и густина из (16). Потом се провери проток масе

$$M = 2\pi\int_o^{N_{3e}} \rho_3 c_{3m} r_3\, dN_3\,, \tag{27}$$

при чему је $N_3 = 0$ уз главчину а $N_3 = N_{3e}$ уз кућицу. Уколико се појави неслагање мораће се узети друге вредности за интеграциону константу а рачун понављати докле се не постигне жељена тачност. Облик претпостављених струјница провериће се на основу израза

$$\Delta M = 2\pi\,\rho_3 c_{3m} r_3 \Delta N_3 = 2\pi\,\rho_o c_{om} r_o \Delta N_o \tag{28}$$

где је ΔM проток масе између две суседне струјнице, а ΔN_o и ΔN_3 њихово растојање на посматраним местима „o" и „3".

Ако се усвоји напор h_{stv} (инверзни проблем), онда је c_{3u} одређено једначином (19). У том случају горњи систем једначина (кад се реши по c_{3m}) даје

$$\frac{c_{3m}^2}{2} - \frac{1}{\eta_{pol}}\int\frac{c_{3m}^2}{R_{k3}}\, dN_3 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, gRT_{ot} + gh_{stv} - \frac{C'''}{\eta_{pol}} - \frac{c_{3u}^2}{2} - \frac{1}{\eta_{pol}}\int\frac{c_{3u}^2}{r_3}\cos\delta_3\, dN_3. \tag{29}$$

Једначина се, такође, решава на исти начин само је пут до решења краћи и једноставнији.

Све једначине су изведене за компресорско коло (радни венац лопатица). Међутим, пресек „3" може се изабрати произвољно, ма где у лопатичној решетки, и рачун спровести с узимањем у обзир смањења проточног пресека услед коначне дебљине лопатица.

При преласку кроз непокретни венац лопатица (претколо, заколо) струја не мења своју енергију па у изведеним изразима треба ставити $h_{stv} = 0$ и $\omega = 0$ а уместо β_3 унети α_3. Индекс „o" се опет односи на улаз а индекс „3" на излаз непокретног венца лопатица.

Изведене једначине се могу употребити и за анализу струјања кроз турбине, само треба ставити $\dfrac{1}{\eta_{pol}}$ уместо η_{pol}, а h_{stv} узети с негативним знаком.

Промена стања гасне струје, према једначини (16), је политрописка али посматрајући сав систем у односу на околину, промена је адијабатска. Ово се може узети као тачно с обзиром на брзину промене стања. Трење је узето у обзир степеном η_{pol}, односно политрописком променом стања гаса, при чему се енергија трења доводи гасној струји у виду топлоте (n = const.); то је једначином енергије (20) узето у обзир. Ако се промени стање гасне струје а претпостави се да је промена изентрописка (повратна), тад ће се у једначинама изложилац политропе заменити изложиоцем изентропе ($n = \varkappa$) а политрописки степен корисности узети једнак јединици ($\eta_{pol} = 1$).

Примедба — Уместо једначине (23) може се употребити Euler-ова диференцијална једначина за кретање флуида пошто се разложи у правцу радијуса (радијална равнотежа). Тад се, уз извесне претпоставке, долази до сличних решења, али се могућност примене тако добивених израза ограничује на специјалне случајеве (овакав начин применио сам још у свом дипломском раду).

Вихорно струјање кроз аксијални ступањ — У аксијалном ступњу струјнице теку приближно као праве паралелне оси z (оса обртања), па је $R_k = \infty$, $\delta_3 \approx 0$, $c_{3m} = c_{3z}$, $r_3 c_{3u} =$ const., а интеграл

$$\int \frac{c_{3u}^2}{r_3} \cos \delta_3 \, dN_3 = -\frac{c_{3u}^2}{2},$$

где је $dN_3 = dr_3$. Сад једначина (29) гласи

$$\frac{c_{3z}^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} gRT_{ot} + gh_{stv} - \frac{C'''}{\eta_{pol}} + \frac{c_{3u}^2}{2} \left(\frac{1}{\eta_{pol}} - 1 \right), \tag{30}$$

а једначина (24) прелази у

$$\frac{n}{n-1} gRT_3 = C''' - \frac{c_{3u}^2}{2}. \tag{31}$$

Ако се занемаре губици на трење, онда је процес изентрописки, па је $n = \varkappa$ ($\eta_{pol} = 1$), и једначина (30) постаје једнака

$$\frac{c_{3z}^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} gRT_{ot} + gh_{stv} - C''' = \text{const.} \tag{32}$$

Резултат потврђује већ познату чињеницу да је при струјању без трења $c_{3z} = \text{const.}$, и да је струјање паралелно оси z.

Међутим, из једначине (30) се види да у струјања с трењем, што је у турбомашинама увек случај, осна брзина није константна већ да је функција полупречника чак и у вихорном струјању с константним изложиоцем политропе односно политрописким степеном корисности. Ако се стави

$$a = 2 \left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} gRT_{ot} + gh_{stv} - \frac{C'''}{\eta_{pol}} \right) = \text{const.},$$

$$b = \left(\frac{1}{\eta_{pol}} - 1 \right) k^2 = \text{const.}, \quad (k = r_3 c_{3u} = \text{const.}),$$

једначина (30) добива облик

$$c_{3z}^2 = a + \frac{b}{r_3^2}\,^{1)},$$

Ова крива четвртог степена, која опада када r_3 расте и где $c_{3z} \to \infty$ кад $r_3 \to 0$ и напослетку $c_{3z} \to \sqrt{a}$ кад $r_3 \to \infty$. Узете су само вредности позитивна знака јер негативне вредности немају смисла. Вредности блиске нули отпадају јер тај простор заузима главчина.

Диференцијалне једначине радијалне струјне равнотеже — Струјање невискозна нестишљива флуида кроз просторе претккола и закола повинује се једначини

$$p + \rho \frac{c^2}{2} = e, \tag{33}$$

где e претставља енергију коју поседује делић јединичне запремине, Промена енергије у правцу нормале меридијанских струјница добива се диференцирањем једначине (33); тако је

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial e}{\partial N} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N} + \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial N}. \tag{34}$$

Према једначини (13) и $F_N \approx 0$, биће

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial N} = \frac{c_u^2}{r} \cos \delta - \frac{c_m^2}{R_k}. \tag{35}$$

---

1) У већини практичних проблема b има малу вредност и може се узети $c_{3z} = \sqrt{a}$.

Сменом $\dfrac{\partial p}{\partial N}$ из (35) у (34) следује

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial e}{\partial N}=\frac{c_u^2}{r}\cos\delta-\frac{c_m^2}{R_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial N},$$

што на местима где се може ставити $\partial N=dr$ и сменом $c^2=c_u^2+c_m^2$, доводи до резултата

$$\frac{1}{\rho}\frac{de}{dr}=-\frac{c_m^2}{R_k}+\frac{1}{2}\frac{dc_m^2}{dr}+\frac{c_u^2}{r}+\frac{c_u dc_u}{dr}, \tag{36}$$

јер је $\delta=0$. Анализа ове једначине већ је позната [2] а даје услове под којима се могу остварити поједини закони струјања, и то вихорно струјање и струјање сталног степена реакције. Овде се показује само начин извођења једначине, јер се досад до ње долазило физикалним посматрањем струјања.

ЛИТЕРАТУРА

1) C. O. Holmquist and W. D. Rannie, An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Axial Turbomachines, Journal of the Aernautical Sciences, Vol. 23. June 1956, No. 6.

2) Н. М. Обрадовић, Аксијални компресори, Београд, 1959.

Stanislav T. Pejović

AN APPROXIMATE METHOD OF CALCULATING THREE-DIMENSIONAL COMPRESSIBLE FLOW IN TURBOMACHINES

Studying Holmquist-Rannie's method of calculating three-dimensional compressible flow I noticed that the problem simplifies when the analysis is made along the normal of meridional streamlines. Bacause of that it was necessary to find components of Euler's equation of motion in tangent and normal directions of the meridional streamlines. The method of the analysis presented in this paper can be used for compressible and incompressible flow in turbomachines.

In order to find the components of Euler's equation of motion (1) in tangent and normal directions of the meridional streamlines it was necessary to find the curvature (or radius of curvature) of the meridional sreamlines, Eq. (6); the unit tangent and normal vectors, Eqs. (9) and (10). So the components of the acceleration in the tangent and normal direction (11) and (12), lead to the Eqs. (13), (14) and (15). They are Euler's equations written in the wanted scalar form. These equations have a general character as Eq. (1).

Using the known equations and Eq. (13) for $F_N=0$ the solution for direct problem [Eq. (25)], and for inverse problem [Eq. (29)] for politropic (izentropic) flow has been found. The equations can be used for any shape of steamlines.

For vortex flow in axial turbomachines, equations became very simple and confirm that for izentropic flow the axial velocity is constant [Eq. (32)], but for politropic flow it is given by the curve of the fourth degree.

With Eq. (13) and energy equation (33) the already known equation of radial stability Eq. (36) has been obtained and only the way of its deduction is shown in this paper.